表現行列の代数関係を用いたMAPに対する計数過程の積率構成法

01109930　群馬大学　　河西 憲一　KAWANISHI Ken'ichi

1.　はじめに

待ち行列システムにおける客の到着を記述するモデルとして，マルコフ型到着過程 (Markovian arrival process: MAP) と呼ばれる確率過程のクラスが知られている．最近，独立で同一な2状態MAPの重畳について，逆行列や行列指数関数を使わない計数過程の積率構成法が報告されたが [1]，本稿では必ずしも同一ではない2状態MAPの重畳についてその構成法が適用可能か検討する．

2.　MAPとその表現行列

2次元の状態空間 $\{(n,j): n \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathcal{S}\}$ 上の（斉時的な）連続時間マルコフ連鎖 $\{(N(t),J(t))\}$ を考える．ここで，$\mathbb{Z}_+ \triangleq \{0,1,\ldots\}$, $\mathcal{S} \triangleq \{0,1,\ldots,m\}$ であり，m は1以上の整数である．マルコフ連鎖 $\{(N(t),J(t))\}$ の推移速度行列 $\tilde{Q}$ が

$$\tilde{Q} \triangleq \begin{pmatrix} C & D & & \\ & C & D & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1}$$

で与えられるとき，$\{(N(t),J(t))\}$ をMAPと呼ぶ．C と D はMAPの表現行列と呼ばれ，各々 $(m+1)\times(m+1)$ の正方行列である．C と D がMAPの表現行列であるためにはいつくかの制約がある．すなわち，C の対角要素は負であり，非対角要素は非負であり，また D の要素は全て非負であるが少なくとも1つは正である．さらに，$Q \triangleq C + D$ は状態空間 $\mathcal{S}$ 上に定義されるMAPの到着を支配する連続時間マルコフ連鎖の推移速度行列に等しく，全ての要素が1の列ベクトルを $\mathbf{1}^\top$，全ての要素が0の列ベクトルを $\mathbb{0}^\top$ とすると，$Q\mathbf{1}^\top = (C+D)\mathbf{1}^\top = \mathbb{0}^\top$ である．これらの条件を満足する表現行列 C と D が与えられれば，1つのMAPを記述することができる．

3.　同一2状態MAPの重畳

3.1.　積率の構成法 [1]

やや天下り的ではあるが，以下の正方行列 $V(n,t)$ を考える．

$$V(n,t) \triangleq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} P(k,t), \quad (n \ge 0) \tag{2}$$

ここで，正方行列 $P(n,t)$ はその i 行 j 列番目 $(0 \le i \le m, 0 \le j \le m)$ の要素が $\Pr[N(t) = n, J(t) = j | N(0) = 0, J(0) = i]$ によって与えられるMAP$\{(N(t),J(t))\}$ の推移確率行列である．$P(n,t)$ についてのコルモゴロフの前進方程式を使うことにより，$V(n,t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(0,t) = V(0,t)Q, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(n,t) = V(n,t)Q + nV(n-1,t)D, (n \ge 1) \tag{4}$$

に従うことがわかる．ただし，初期条件は $V(0,0) = I$（I は単位行列）であり，$n \ge 1$ に対して，$V(n,0) = O$（O は要素がすべて0の行列）である．MAP$\{(N(t),J(t))\}$ において，$N(t)$ は $(0,t]$ に生じた到着イベントの回数であることから，$V(n,t)$ は $N(t)$ についての（階乗）積率についての行列であることがわかる．文献 [1] の手法は直接微分方程式系 (3), (4) を解くことで積率を構成するが，$V(n,t)$ を以下のように分解する点に特徴を有する．すなわち，$n = 0$ のとき $V(0,t) = \exp[Qt]$ であり，$n \ge 1$ に対する $V(n,t)$ は

$$V(n,t) = n!M(n,t)\exp[Qt] \tag{5}$$

のように分解する．ただし，$M(n,t)$ は時間順序づけられた積分

$$M(n,t) \triangleq \int_{\Omega_{n,t}} K(t_1)\cdots K(t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n \tag{6}$$

$$\Omega_{n,t} \triangleq \{(t_1,\ldots,t_n): 0 < t_1 < \cdots < t_n < t\}$$

によって定義され，さらに行列で表される積分核 $K(t)$ は

$$K(t) \triangleq \exp[Qt]D\exp[-Qt] \tag{7}$$

で定義される．このように分解したとしても，行列指数関数の積分評価が必要となり一般のMAPについては $M(n,t)$ の解析的な評価が困難である．しかしながら，独立で同一な2状態MAPの重畳についてはその表現行列 C と D を適当に選び，それらの代数関係を活用することで以下の補題を得る．

補題 1. *C と D を独立で同一な m 個の2状態MAPを重畳して得られるMAPの表現行列とする．このとき，$k \ge 0$ に対して*

$$\mathrm{ad}_Q^n D = \begin{cases} q_0^{2k}\mathrm{ad}_Q D, & (n = 2k+1) \\ q_0^{2k}\mathrm{ad}_Q^2 D, & (n = 2k+2) \end{cases} \tag{8}$$

が成立し，$K(t)=\exp[Qt]D\exp[-Qt]$ は

$$K(t)=R+e^{q_0t}S+e^{-q_0t}T, \tag{9}$$

を満たす．ただし，$q_0=q_++q_-$ であり，q_+ 及び q_- は２状態 MAP を支配する連続時間マルコフ連鎖の２つの遷移率である．また，$R,S,$ 及び T は $(m+1)\times(m+1)$ 行列であり，

$$R\triangleq D-\frac{1}{q_0^2}\mathrm{ad}_Q^2D, \tag{10}$$

$$S\triangleq \frac{1}{2q_0^2}\left(\mathrm{ad}_Q^2D+q_0\mathrm{ad}_QD\right), \tag{11}$$

$$T\triangleq \frac{1}{2q_0^2}\left(\mathrm{ad}_Q^2D-q_0\mathrm{ad}_QD\right) \tag{12}$$

で定義される．ただし，正方行列 X,Y に対して，$\mathrm{ad}_X^0Y\equiv Y$,$\mathrm{ad}_XY\equiv[X,Y]$, $\mathrm{ad}_X^2Y\equiv[X,[X,Y]]$ 等であり，$[X,Y]\equiv XY-YX$ である．

補題 1 の $K(t)$ を使えば，行列指数関数の積分を評価するのではなく，初等関数の積分を評価することで $M(n,t)$ を計算することができるというのが，文献 [1] の要点である．

3.2. 補題 1 の証明（概要）

補題 1 においては，独立で同一な２状態 MAP の重畳の表現行列 C と D が２状態 MAP を記述する６つの正のパラメータ $c_+,c_-,d_+,\lambda_+,d_-,$ 及び λ_- と，$\alpha=(c_++d_++\lambda_+)-(c_-+d_-+\lambda_-)$, $\beta=c_++d_++\lambda_++c_-+d_-+\lambda_-$ を用いて

$$C=c_+E_++c_-E_--\frac{\alpha}{2}E_3-\frac{m\beta}{2}I, \tag{13}$$

$$D=d_+E_++d_-E_-+\frac{\lambda_+-\lambda_-}{2}E_3+\frac{m(\lambda_++\lambda_-)}{2}I, \tag{14}$$

によって与えられることが前提である．C と D の構成要素 E_+,E_-,E_3 は $(m+1)\times(m+1)$ の正方行列であり，$\delta_{i,j}$ をクロネッカーのデルタとして，その i 行 j 列番目の要素がそれぞれ，

$$(E_+)_{i,j}\triangleq(m-i)\delta_{i,j-1}, \tag{15}$$

$$(E_-)_{i,j}\triangleq i\delta_{i,j+1}, \tag{16}$$

$$(E_3)_{i,j}\triangleq(m-2i)\delta_{i,j}, \tag{17}$$

によって具体的に与えられる．実は表現行列の構成要素 E_+,E_-,E_3 に対して成立する代数関係が補題 1 で重要な役割を果たす．

直接計算することにより，E_+,E_-,E_3 の間には

$$[E_+,E_-]=E_3,[E_3,E_+]=2E_+,[E_3,E_-]=-2E_-$$

のような関係が成立していることがわかる．この関係を使うことにより，式 (8) が，さらには行列 $R,S,$ 及び T で展開した $K(t)$ が得られる．この関係は，2×2 行列で行列式が 1 であるような行列から構成される群 $SL(2,\mathbb{R})$ における代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の生成子 $\hat{e}_+,\hat{e}_-,$ 及び $\hat{e}_3$ が満足する代数関係と同一である．

4. 同一ではない２状態 MAP の重畳の場合

以下，独立ではあるが必ずしも同一ではない 2 状態 MAP の重畳について，補題 1 と同様な結果が得られるか検討してみる．２つの独立な MAP の表現行列をそれぞれ $C^{(1)},D^{(1)}$ 及び $C^{(2)},D^{(2)}$ とするとき，この２つの MAP を重畳して得られる連続時間マルコフ連鎖は MAP であり，その表現行列はクロネッカー和 $\oplus$ を使って $C_s=C^{(1)}\oplus C^{(2)}$ と $D_s=D^{(1)}\oplus D^{(2)}$ で与えられる．また，重畳された MAP を支配する連続時間マルコフ連鎖の推移速度行列を Q_s とすれば $Q_s=Q^{(1)}\oplus Q^{(2)}$ となることはよく知られている．クロネッカー和（とクロネッカー積）の基本性質を使えば，$n\geq0$ に対して

$$\mathrm{ad}_{Q_s}^nD_s=\mathrm{ad}_{Q^{(1)}}^nD^{(1)}\oplus\mathrm{ad}_{Q^{(2)}}^nD^{(2)} \tag{18}$$

が成立することがわかる．すると，次の補題が得られる．

補題 2. $C^{(1)},D^{(1)}$ 及び $C^{(2)},D^{(2)}$ をそれぞれ異なるパラメータで記述される２状態 MAP における表現行列とする．また，$q_+^{(1)}$ と $q_-^{(1)}$ （$q_+^{(2)}$ と $q_-^{(2)}$）を $C^{(1)},D^{(1)}$ （$C^{(2)},D^{(2)}$）で表現される２状態 MAP を支配する連続時間マルコフ連鎖の２つの遷移率とする．もし $q=q_+^{(1)}+q_-^{(1)}=q_+^{(2)}+q_-^{(2)}$ ならば，$k\geq0$ に対して

$$\mathrm{ad}_{Q_s}^nD_s=\begin{cases}q^{2k}\mathrm{ad}_{Q_s}D_s, & (n=2k+1)\\ q^{2k}\mathrm{ad}_{Q_s}^2D_s, & (n=2k+2)\end{cases} \tag{19}$$

が成立する．

例えばマルコフ変調ポアソン過程を考えると，変調される到着率が２つのマルコフ変調ポアソン過程それぞれについて異なっていても $q=q_+^{(1)}+q_-^{(1)}=q_+^{(2)}+q_-^{(2)}$ ならば補題 2 が成立する．また，２つの２状態 MAP が同一ならば補題 1 において $m=2$ とした場合と同様な結果が得られるが，両者の表現行列は異なる．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の生成子 $\hat{e}_+,\hat{e}_-,$ 及び $\hat{e}_3$ の表現行列は 1 つではなく，補題 1 では 3 行 3 列の，補題 2 では 4 行 4 列の表現行列となっており，代数関係が本質であることがわかる．

5. おわりに

本稿では代数関係を用いた MAP に対する計数過程の積率構成法において，独立ではあるが必ずしも同一ではない２状態の MAP の重畳について検討した．

参考文献

[1] 河西憲一，２状態マルコフ型到着過程の重畳における階乗モーメントの表現について，電子情報通信学会技術研究報告, IN2004-16, 31–36 (2004).