

Jordan 標準形による PH 分布の陽表現

02103790 神奈川大学 *岸 康人 KISHI Yasuhito
01102990 神奈川大学 紀 一誠 KINO Issei

1. はじめに

PH 分布を支配する subgenerator Q の固有値は PH 分布の性質を調べる際に重要な役割をはたす。従来の研究では、いくつかの限定された場合については、その密度関数が陽な形で与えられているが、一般的な場合については、密度関数の下限が係数付きの Erlang 分布で与えられているのみである。また、PH 分布の表現 (a, Q) には、冗長性があり、同じ分布でもその表現には自由度がある。これらの問題を解決するため、本稿では Jordan 標準形を用いて Q を表し、陽な形で確率密度関数を得る。

2. PH 分布の表現と密度関数

PH 分布：吸収状態 $\{0\}$ ，一時的状態 $I_M = \{1, 2, \dots, M\}$ をもつ吸収マルコフ過程を $\{X(t), 0 \leq t\}$ とし、その推移速度行列を

$$(1) \quad Q^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & Q \end{bmatrix},$$

初期分布を

$$(2) \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_M)$$

とする。このマルコフ過程 $\{X(t)\}$ が吸収状態に達するまでの時間分布を PH 分布といい、 (a, Q) を PH 分布の表現という。また、 Q を subgenerator と呼ぶものとする。推移速度行列の性質から、 ${}^t q = (q_{10}, q_{20}, \dots, q_{M0})$, $q_{i0} \geq 0, i \in I_M$ であり、 $q_{ii} < 0 (i \in I_M)$, $q_{ij} \geq 0 (Q = (q_{ij}), i \neq j \in I_M)$, $q + Q1 = 0$ である。ただし、 $1 = {}^t (1, 1, \dots, 1)$ である。密度関数：PH 分布 (a, Q) の確率密度関数は形式的には次のようになる。

$$(3) \quad f(t) = a \exp(Qt)q, \quad 0 < t.$$

一般に、密度関数が与えられたときの PH 分布の表現は一意ではない。上式は、行列の無限級数を含んでおり、密度関数、分布関数が陽な形で表現されているとはいえない。

3. Jordan 標準形による密度関数の陽表現

固有多項式と最小多項式：いま、 Q の固有多項式 $f_Q(t)$ および最小多項式 $g_Q(t)$ がそれぞれ

$$f_Q(t) = \prod_{i=1}^{N_r} (t - \lambda_i)^{m_{ri}} \prod_{i=1}^{N_c} (t - \sigma_i)^{n_{ci}} (t - \bar{\sigma}_i)^{n_{ci}}$$

$$g_Q(t) = \prod_{i=1}^{N_r} (t - \lambda_i)^{m_{ri}} \prod_{i=1}^{N_c} (t - \sigma_i)^{m_{ci}} (t - \bar{\sigma}_i)^{m_{ci}}$$

である場合を考える。ここで、固有値 $\lambda_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, N_r)$, $\sigma_i \in \mathbb{C} (i = 1, \dots, N_c)$, $\bar{\sigma}_i$ は σ_i と複素共役とし、 $m_{ri}, m_{ci}, n_{ri}, n_{ci}$ は自然数であり、 $m_{ri} \leq n_{ri}, m_{ci} \leq n_{ci}$ とする。ただし、最小多項式とは、 $g_Q(Q) = 0$ となる多項式の中で、次数が最低で、最高次の係数が 1 であるものである。

Q の Jordan 標準形： Q は、以下のように書ける。

$$Q = UJV, \quad J = \bigoplus_{i=1}^{N_r} J(\lambda_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N_c} J(\sigma_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{N_c} J(\bar{\sigma}_i)$$

$J(\lambda_i), J(\sigma_i), J(\bar{\sigma}_i)$ は、それぞれの固有値に対する Jordan 標準形で、

$$J(\lambda_i) = \bigoplus_{k=1}^{m_{ri}} \bigoplus_{\ell=1}^{\ell(\lambda_i, k)} J_{\ell}(\lambda_i, k)$$

$J_{\ell}(\lambda_i, k)$ は、固有値 λ_i に関する次数 k の ℓ 番目の Jordan cell で、 $\ell(\lambda_i, k)$ は、固有値 λ_i の k 次の Jordan cell の個数。

$$J(\lambda, k) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I_k + N_k,$$

ただし、 I_k は、 k 次の単位行列、 N_k は、 $(N_k)^k = 0$ となるべき零行列、

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

である。また、 $\bigoplus_{\ell=1}^n A_\ell$ は、ブロック対角行列、

$$\bigoplus_{\ell=1}^n A_\ell = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}$$

を表す。 $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$ についても同様。

ここで、 U, V は、それぞれ Jordan cell の右固有ベクトル、左固有ベクトルから構成される行列であり、固有値との対応で、

$$U = [U(\lambda), U(\sigma), U(\bar{\sigma})],$$

$$V = [V(\lambda), V(\sigma), V(\bar{\sigma})]^t$$

と書けて、

$$UV = I$$

となるように、 U, V をとることができる。さらに、Jordan cell との対応から、

$$U(\lambda) = \left\{ \left\{ \{U_\ell(\lambda_i, k)\}_{\ell=1}^m \right\}_{k=1}^m \right\}_{i=1}^{N_r}$$

$$U_\ell(\lambda_i, k) = \left\{ u_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) \right\}_{j=1}^k$$

$$V(\lambda) = \left[\left[\{V_\ell(\lambda_i, k)\}_{\ell=1}^m \right]_{k=1}^m \right]_{i=1}^{N_r}$$

$$V_\ell(\lambda_i, k) = \left[v_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) \right]_{j=1}^k$$

のように表される。ただし、 $u_j^{(\ell)}(\lambda, k), v_j^{(\ell)}(\lambda, k)$ を、それぞれ ℓ 番目の k 次の Jordan cell に対応する j 番目の右および左一般固有ベクトルとする。

密度関数の陽表現: (3) 式の密度関数は、前項の Jordan 標準形を使って、以下のように、行列の無限級数を含まない陽な形に書き直すことができる。

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{n=0}^{m_i-1} \frac{t^n}{n!} e^{\lambda_i t} \alpha_n(\lambda_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{n=0}^{m_{ci}-1} \frac{t^n}{n!} e^{\mu(\sigma_i)t} \psi_n(\sigma_i, t)$$

$$= (\text{Erlang 分布の線形結合}) + (\text{Ripple Terms}).$$

ここで、

$$\alpha_n(\lambda_i) = \sum_{k=n+1}^{m_{ri}} \sum_{\ell=1}^{\ell(\lambda_i, k)} \sum_{s=1}^{k-n} g_s^{(\ell)}(\lambda_i, k) \cdot h_{s+n}^{(\ell)}(\lambda_i, k),$$

$$\psi_n(\sigma_i, t) = 2r_n(\sigma_i) \cos \{ \nu(\sigma_i)t + \varphi_n(\sigma_i) \},$$

また、

$$g_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) = \left(a, u_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) \right),$$

$$h_j^{(\ell)}(\lambda_i, k) = \left(v_j^{(\ell)}(\lambda_i, k), q \right),$$

($\sigma_i, \bar{\sigma}_i$ に関して同様。)

$$\nu(\sigma_i) = \text{Im}(\sigma_i), \mu(\sigma_i) = \text{Re}(\sigma_i),$$

$$\delta_n(\sigma_i) = \sum_{k=n+1}^{m_{ci}} \sum_{\ell=1}^{\ell(\sigma_i, k)} \sum_{s=1}^{k-n} g_s^{(\ell)}(\sigma_i, k) \cdot h_{s+n}^{(\ell)}(\sigma_i, k),$$

$$r_n(\sigma_i) = |\delta_n(\sigma_i)|, \varphi_n(\sigma_i) = \arg \delta_n(\sigma_i),$$

$$\delta_n(\sigma_i) = r_n(\sigma_i) e^{\varphi_n(\sigma_i)i},$$

である。

この密度関数の形から、本質的に影響を与えるのは、subgenerator Q の固有多項式の次数ではなく、最小多項式の次数であることがわかる。

4. 数値例

次のような表現 (a, Q) をもつ PH 分布を考える。

$$Q = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & -1.2 & 0.7 \\ 1.0 & 0.1 & -1.5 \end{bmatrix}, a = (0.3, 0.5, 0.2)$$

subgenerator Q は、次のような固有値をもち、最小多項式の次数は全て 1 である。

$$\lambda = -0.2248,$$

$$\sigma = -1.8376 + 0.13038i, \bar{\sigma} = -1.8376 - 0.13038i$$

このとき、密度関数は次のようになる。

$$f(t) = 0.22e^{-0.22t} + 0.21 \cdot \cos(-1.63 + 0.13t)e^{-1.83t}$$

