

売り出しのタイミング・ゲーム

寺岡義伸 (01302694) 北條仁志 (01907194)

大阪府立大学大学院理学系研究科情報数理科学専攻

1. はじめに

ここで扱う問題は、以下の例で説明するとはっきりする2人非0和ゲームである。

2人のプレーヤ (Player I, II) が、小豆や大豆と言った生産物の販売をある市場で複占している。I と II による市場占有率は半々であり、お互いに競争状態にある。この生産物は周期的に収穫でき各期の初めに生産されると、2人のプレーヤは同じ割合で販売権を持ち、何時売りに出すかのタイミングを考えなければならない。両プレーヤは、次の期には新しい収穫があるので、この生産物を各期の終わりまでには売ってしまわなければならない。各期の初めに収穫した生産物の評価額は、両プレーヤのいずれもが売りに出さない間は時間の経過に伴って上昇する。しかし、いずれか一方のプレーヤが自分の持分を売りに出すと急激に (不連続的に) 評価額が下落し、その後また時間の経過に従って上昇する。2人のプレーヤの各々は、互いに、その生産物の評価額と、相手プレーヤの売りだし時刻を考えに入れながら、売り出しのタイミングを決定しなければならない。

2. 記号と仮定

本報告では1期間のゲームを考え、期間は単位区間 $[0, 1]$ で表現する。

$v(t)$: 両プレーヤともにまだ売りに出していないときの、時刻 $t \in [0, 1]$ における生産物の価値

微分可能であり $v'(t) > 0$ for $t \in (0, 1)$ を仮定する。

r : 一方のプレーヤが既に売りに出したときの割引率で、

$$0 < r < 1$$

と仮定。すなわち一方のプレーヤが既に売りに出した後は、

$t \in [0, 1]$ での評価額は $v(t)$ から $rv(t)$ へ減少する。

我々はまた、 $0 < v(0) < \infty$ を仮定する。

ここで、もし二人のプレーヤが同時に時刻 $t \in [0, 1]$ で売りに出したときは、評価額 $v(t)$ を半分ずつ分け合うことになるとする。

このような問題にあっては、通常のタイミングゲームと同様に、各プレーヤに利用できる情報の様式には二つの型がある。

3. サイレントゲーム

ここでは、二人ともサイレントな状態にあるものとする。お互いに、相手が既に売りに出したのか、まだ出していないのかわからず、自分が売りを出してから始めて、生産物の評価額を知ることとなる。従って、Player I と Player II の純戦略をそれぞれ、 $x \in [0, 1]$ と $y \in [0, 1]$ とすると

$$M_1(x, y) = \begin{cases} v(x), & x < y \\ (1/2)v(x), & x = y \\ rv(x), & x > y \end{cases} ; \quad (1)$$

$$M_2(x, y) = \begin{cases} v(y), & y < x \\ (1/2)v(y), & y = x \\ rv(y), & y > x \end{cases} \quad (2)$$

定理 1. $rv(1) > v(0)$ とする。この時、 a^0 を方程式 $v(a) = rv(1)$ の区間 $[0, 1]$ における唯一つの根とし、さらに混合戦略として

$$F^0(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < a^0 \\ [1/(1-r)][1-\{1-v(a)/v(z)\}], & a^0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

とする。そうすると $(F^0(x), F^0(y))$ は非 0 和ゲーム(1)と(2)に対しての 1 つの平衡点である。また、対応する I に対しての平衡値 v_1 と II に対しての平衡値 v_2 は

$$\begin{cases} v_1 = M(F^0, F^0) = rv(1) ; \\ v_2 = M(F^0, F^0) = rv(1) \end{cases}$$

定理 2 $(1/2)v(0) \leq rv(1) \leq v(0)$ が成立すると仮定する。次のような二つの混合戦略を考える：

$$\begin{aligned} F_0(z) &= 1 - [1/(1-r)][1 - \{rv(1)/v(0)\}], & z = 0 \\ &= [1/(1-r)][1 - \{rv(1)/v(z)\}], & 0 < z \leq 1 ; \\ F_1(z) &= [1/(1-r)][1 - \{rv(0)/v(z)\}], & 0 \leq z < 1 \\ &= 1 - [1/(1-r)][1 - \{rv(0)/v(1)\}], & z = 1, \end{aligned}$$

すなわち、前者は点 1 に、後者は点 0 に、それぞれ mass part を持つように混合戦略 (cdf) を選ぶ。そうすると $(F_1(x), F_0(y))$ および $(F_0(x), F_1(y))$ は非 0 和ゲーム (1) と (2) の平衡点である。この時、対応する平衡値は

$$\begin{cases} M_1(F_0, F_1) = v(0) \\ M_2(F_0, F_1) = rv(1) \end{cases} \quad \begin{cases} M_1(F_1, F_0) = rv(1) \\ M_2(F_1, F_0) = v(0) \end{cases}$$

$rv(1) < (1/2)v(0)$ に対しての結果とノイジーゲームについては講演で。