

Ex ante α -core with incentive constraints東京工業大学 *上代 雄介 KAMISHIRO Yusuke
東京工業大学 内海 幸久 UTSUMI Yukihisa

1 はじめに

戦略形ゲームの協力の解概念としては, Aumann and Peleg [1] によって定義された α -core, β -core などがある. 本研究では, α -core をインセンティブ制約を考慮して Bayesian game (情報不完備な戦略形ゲーム) に適用する.

情報不完備なゲームで協力が行われるときには, プレイヤー間で情報の交換を行って行動すると考えられるが, その場合には, 契約 (プレイヤーの情報を集めてそれぞれのプレイヤーの行動を決定するもの) がインセンティブの制約を満たしていることが望ましい (本研究では, 提携を組んだときの契約はメカニズムを通じて行われるとする).

そのインセンティブ制約を, 一般の Bayesian game の協調行動の分析に導入する際には提携の外部の行動を考慮する必要がある (提携の外部の行動を考慮する必要がない場合, 交換経済など, に関しては [2] や [3] で分析されている).

一般に情報不完備な協力ゲームは, プレイヤーが自分のタイプを知る前 (ex ante) に提携を組むとする場合と, プレイヤーが自分のタイプのみを知った後 (interim) に提携を組むとする場合の2つに分けて分析されるが, 今回は提携が ex ante stage に形成される場合を考察する.

本研究では, 外部の行動を考慮したインセンティブ制約を導入し, ex ante stage に提携が形成される場合に全体提携が安定になる (ex ante α -incentive compatible core が非空になる) ための十分条件を紹介する.

2 Model and Scenario

Bayesian game とは, 以下の組で与えられる.

$$(N, \{X_i, u_i, T_i\}_{i \in N}, p).$$

ここで,

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$: プレイヤーの集合
- $X_i (\subset \mathbb{R}^{m_i})$: プレイヤー i の戦略の集合 (非空, 凸, コンパクトと仮定)
- T_i : プレイヤー i のタイプの集合 (有限)
(記号の簡略化のため, 以降 $X_S := \prod_{j \in S} X_j$ ($S \subseteq N$), $X := X_N$, $T_S := \prod_{j \in S} T_j$, $T := T_N$, $T_{-i} := \prod_{j \in N \setminus \{i\}} T_j$ と表記する.)
- $u_i : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$: プレイヤー i の効用関数, ここで $u_i(\cdot, t)$ はすべての $t \in T$ に関して連続とする.
- p : T 上の事前確率.

次に, 提携 S に対するメカニズムを定義する. 提携 S に対する, 実行可能な (直接) メカニズムの集合を M^S と表記する, すなわち,

$$M^S := \{\mu^S : T \rightarrow X_S \mid \mathcal{T}_S\text{-measurable}\}.$$

ここで, μ^S が \mathcal{T}_S -measurable であるとは, μ^S が $t_S \in T_S$ のみに依存していることを意味する.

プレイヤーが提携 S を形成して協調行動をとる際には, 上で定義したメカニズムを用いるとすると, ex ante stage に提携が形成される Bayesian game は以下の流れになる.

1. 提携構造 $\{S_1, \dots, S_K\}$ が形成される. ここで, 提携構造とは, N の分割である.
2. それぞれの提携 S_k がメカニズム $\mu^{S_k} \in M^{S_k}$ を選択する.
3. すべてのプレイヤー $i \in S_k$ は自分の真のタイプ $t_i \in T_i$ を知る.
4. プレイヤー $i \in S_k$ は自分のタイプ $s_i \in T_i$ を μ^{S_k} に報告し, その後 μ^{S_k} は戦略 profile $\mu^{S_k}(s_1, \dots, s_n)$ を決定する. (ここで, それぞれのプレイヤーは必ずしも真のタイプを報告する必要はない.)

以下では α -core のみを考察するので、形成される提携構造は、 $\{S, N \setminus S\}$ の形の場合に限定しても問題ないことが示せる。よって、以降の議論では、形成される提携構造は $\{S, N \setminus S\}$ の形に限定する。

3 Definition and Result

ここで、メカニズム μ^S に対するインセンティブ制約を導入する。 t_i をプレイヤー i の真のタイプ、 s_i をプレイヤー i が報告したタイプとする。ここで、提携外のメンバーがメカニズム $\mu^{N \setminus S}$ を用いたとしたときの、プレイヤー i の (interim stage における) 期待利得を $Eu_i(\mu^S, \mu^{N \setminus S} | t_i, s_i)$ で表記する。

定義 メカニズム μ^S が α -incentive compatibility を満たすとは、以下を満たすことである。

$$\begin{aligned} \forall \mu^{N \setminus S} \in M^{N \setminus S} : \forall i \in S : \forall t_i, \forall s_i \in T_i : \\ Eu_i(\mu^S, \mu^{N \setminus S} | t_i, t_i) \geq Eu_i(\mu^S, \mu^{N \setminus S} | t_i, s_i). \end{aligned}$$

この定義の意味は、提携 S のメンバー以外のプレイヤーがいかなるメカニズムを用いたとしても、プレイヤーは自分のタイプを偽って述べることによって自分の利得をすることはできないということである。

Ex ante stage における期待利得は、

$$\begin{aligned} Eu_i(\mu^S, \mu^{N \setminus S}) \\ = \sum_{t_i \in T_i} p_i(t_i) Eu_i(\mu^S, \mu^{N \setminus S} | t_i, t_i) \\ = \sum_{t \in T} p(t) u_i(\mu^S(t), \mu^{N \setminus S}(t), t) \end{aligned}$$

(ここで、 p_i は T_i 上の周辺確率である)。

定義 提携 $S \subseteq N$ に対し、ex ante α -incentive compatible effectiveness を以下で定義する：

$$\begin{aligned} V^*(S) := \bigcup_{\mu^S \in M^S, \mu^{N \setminus S} \in M^{N \setminus S}} \bigcap \left\{ (u_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N \right. \\ \left. \mid \forall i \in S, u_i \leq Eu_i(\mu^S, \mu^{N \setminus S}) \right\} \end{aligned}$$

定義 Ex ante α -incentive compatible core

$C(V^*)$ を次のように定める。

$$C(V^*) := V^*(N) \setminus \bigcup_{S \subseteq N} \text{int } V^*(S).$$

Ex ante α -incentive compatible core が非空になるための十分条件について、以下のものがある。

命題 すべてのプレイヤーの効用がすべての $t \in T$ に関して linear であるとき、ex ante α -incentive compatible core は非空である。

命題 2人 Bayesian game において、ex ante α -incentive compatible core は非空である。

4 おわりに

インセンティブを課さない場合の ex ante α -core については、プレイヤーの利得関数が quasi-concave の場合に非空であることがわかっている (Hirase and Utsumi [4]) が、quasi-concave であつて、linear でないときに ex ante α -incentive compatible core が非空になるかどうかを検討する必要がある。

参考文献

- [1] Aumann, R.J., and Peleg, B., Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, *Bulletin of the American Mathematical Society* **66** (1960), 173–177.
- [2] Forges, F., The ex ante incentive compatible core of the assignment game, *Mathematical Social Sciences* **47** (2004), 135–151.
- [3] Forges, F., Minelli, E., and Vohra, R., Incentive and the core of an exchange economy: a survey, *Journal of Mathematical Economics* **38** (2002), 1–41.
- [4] Hirase, K., and Utsumi, Y., Ex ante α -core with a communication system, mimeo.