日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

ファジィ主観的ゲームによるゲームの非加法的な分析

02502644 関西大学 ＊古山 滋人 FURUYAMA Shigehito
01401144 関西大学 中井 暉久 NAKAI Teruhisa

1．緒言

非協力ゲームにおけるナッシュ均衡の問題点として、(1)ひとつのゲームにナッシュ均衡点が複数存在する場合がある、(2)ナッシュ均衡点がひとつの場合でもプレイヤーが必ずしもナッシュ均衡戦略をとらない、などが指摘されている。そこで Nakai [1]、Furuyama & Nakai [2]は、主観的ゲームを導入し、問題(1)の部分的解決及び(2)の基本的解決を行った。しかし彼らのモデルでは、動機分布から主観的ゲームを構成する際、期待利得の計算が加法的になされているが、現実には非加法的な場合も多い。例えば、動機 m_1 と m_2 の両方が達成された時の満足度は、単に個々の動機が達成された時の満足度の和ではなく、相乗(相殺)効果があって、より大きな(小さな)満足度になることもある。

本研究では、このような非加法的満足度を考慮するためにファジィ測度を導入する。そして動機分布から主観的ゲームを構成する際の期待利得として、ファジィ積分(特にショケ積分)による評価値を用いる。こうして構成された主観的ゲームをファジィ主観的ゲームと呼ぶ。このことによりプレイヤーのもつ動機に関する非加法的感覚をゲーム分析に取り込むことが可能となる。

2．ファジィ積分による主観的ゲーム

n 人非協力有限ゲーム G を次のように表現する。

$S_i=\{\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{id_i}\}$ ：プレイヤー i の純戦略集合 $(i=1,\cdots,n)$

$d_i(<\infty)$ はプレイヤー i のとりうる純戦略の個数

$a_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ ：プレイヤー $1,\cdots,n$ がそれぞれ純戦略 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ をとった時のプレイヤー i の利得 $\alpha_j\in S_j\,(j=1,\cdots,n)$

$x_i=\langle x_{i1},\cdots,x_{id_i}\rangle$ ：プレイヤー i の混合戦略

x_{ij} はプレイヤー i が純戦略 α_{ij} をとる確率

$a_i(x_1,\cdots,x_n)$ ：プレイヤー $1,\cdots,n$ がそれぞれ混合戦略 $x_1,\cdots,x_n$ をとった時のプレイヤー i の期待利得

$$a_i(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j_1=1}^{d_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{d_n}a_i(\alpha_{1j_1},\cdots,\alpha_{nj_n})x_{1j_1}\cdots x_{nj_n} \quad (1)$$

以下、任意のプレイヤー P (プレイヤー $1,\cdots,n$ のいずれか)にとっての主観的ゲームを構成する。

プレイヤー P は、戦略選択の動機として l 個の動機 $m_1,\cdots,m_l$ が考えられ、かつプレイヤー i の動機分布を $\theta^i=\langle\theta_1^i,\cdots,\theta_l^i\rangle$ と思っているとする。θ_k^i は、プレイヤー i が動機 m_k に従って戦略選択をするとプレイヤー P が思っている確率である。

定義1． 動機集合 $M=\{m_1,\cdots,m_l\}$ 上の集合関数 $g(\cdot)$ がファジィ測度であるとは、

(1) $g(\phi)=0$

(2) $g(M)=1$

(3) $A\subseteq B(\subseteq M)\Rightarrow g(A)\le g(B)$ (単調性) (2)

が成り立つことである。

定義2． 定数 $\lambda(>-1)$ に対し、次の性質を満たすファジィ測度 $g_\lambda(\cdot)$ を $\lambda-$ファジィ測度という。

任意の $A\subseteq M, B\subseteq M$ に対し、$A\cap B=\phi\Rightarrow$

$$g_\lambda(A\cup B)=g_\lambda(A)+g_\lambda(B)+\lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B) \quad (3)$$

$g_\lambda(A)$ は集合 A に属す動機が全て達成された時の満足度を表し、$\lambda=0$ の時は加法的、$\lambda>0$ の時は相乗的なケース、$\lambda<0$ の時は相殺的なケースである。

プレイヤー P が考えるプレイヤー i の動機評価に関して、次の性質(4)を持つ $\lambda-$ファジィ測度 $g_\lambda^i(\cdot)$ を想定する。

$$g_\lambda^i(\{m_k\})=\beta\theta_k^i \quad (k=1,\cdots,l\ ;\ \beta\text{は非負定数}) \quad (4)$$

そうすると

$$g_\lambda^i(\{m_{k_1}, m_{k_2}\}) = \beta\theta_{k_1}^i + \beta\theta_{k_2}^i + \lambda\beta^2\theta_{k_1}^i\theta_{k_2}^i \quad (5)$$

であり、一般に M の任意の部分集合 $\{m_{k_1}, \cdots, m_{k_q}\}$ に対し、

$$g_\lambda^i(\{m_{k_1}, \cdots, m_{k_q}\}) = \sum_{j=1}^{q} \lambda^{j-1}\beta^j \sum_{(p_1,\cdots,p_j)} \theta_{p_1}^i\theta_{p_2}^i \cdots \theta_{p_j}^i \quad (6)$$

$\sum_{(p_1,\cdots,p_j)}$ は $\{k_1, \cdots, k_q\}$ の中から j 個取り出す全ての場合についての和である。定義1の(2)より

$$g_\lambda^i(M) = \sum_{j=1}^{l} \lambda^{j-1}\beta^j \sum_{(p_1,\cdots,p_j)} \theta_{p_1}^i\theta_{p_2}^i \cdots \theta_{p_j}^i = 1 \quad (7)$$

である。β は l 次方程式(7)の解になる。l 個の解の中で、非負で $g_\lambda^i(\cdot)$ が単調性を満たすものを選ぶ。β が決定されればそれを(6)に代入し、λ-ファジィ測度 $g_\lambda^i(\cdot)$ が決定される。

次にプレイヤー i の利得評価を、動機分布 θ^i とそれに基づく λ-ファジィ測度 $g_\lambda^i(\cdot)$ によるショケ(Choquet)積分を用いて行う。

$a_i^k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ ：プレイヤー $1, \cdots, n$ がそれぞれ純戦略 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をとり、プレイヤー i が動機 m_k に従う時のプレイヤー i の利得 $(k = 1, \cdots, l)$

この $a_i^k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は、動機 m_k に応じて原ゲーム G の利得関数 $a_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ から生成されるものである。

定義3.　M 上のファジィ測度を $g(\cdot)$ とする。関数 $h(\cdot)$ は M 上で定義されており、$h(m_1) \geq \cdots \geq h(m_l)$ とする。このとき、ファジィ測度 $g(\cdot)$ による関数 $h(\cdot)$ のショケ(Choquet)積分とは

$$(C)\int h\,dg \equiv \sum_{k=1}^{l} [h(m_k) - h(m_{k+1})] g(M_k) \quad (8)$$

$$M(k) = \{m_1, \cdots, m_k\},\ h(m_{l+1}) = 0 \quad (9)$$

である。

$a_i^k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ の中で異なる値の個数を t 個とし、大きい順に番号が付いているものとする。つまり

$$a_i^1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \cdots = a_i^{k_1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$
$$> a_i^{k_1+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \cdots = a_i^{k_2}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$
$$> a_i^{k_2+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \cdots = a_i^{k_3}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$
$$> \cdots > a_i^{k_{t-1}+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \cdots = a_i^{k_t}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \quad (10)$$

$$k_{z-1} + 1 \leq k_z\ (z = 1, \cdots, t),\ k_0 = 0,\ k_t = l \quad (11)$$

とする。ショケ積分により、プレイヤー i の利得の評価値 $\tilde{a}_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は

$$\tilde{a}_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{z=1}^{t} \{a_i^{k_z}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) - a_i^{k_z+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\} g_\lambda(M_{k_z})$$

$$a_i^{k_t+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = a_i^{l+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0 \quad (12),\ (13)$$

で与えられる。(注) $\lambda = 0$ (加法的)の時、(7)より $\beta = 1$

$$(6)より \quad g_0^i(\{m_{k_1}, \cdots, m_{k_q}\}) = \sum_{i=1}^{q} \theta_{k_i}^i \quad (14)$$

$$(12)より \quad \tilde{a}_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{l} a_i^k(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\theta_k^i \quad (15)$$

これは、従来の主観的ゲームにおける期待利得の計算に他ならない。

以上のことをすべてのプレイヤーについて行うことにより、プレイヤー P にとっての非加法型主観的ゲーム

$$\tilde{G}_P = \left[\tilde{a}_i(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid i = 1, \cdots, n\ ;\ \alpha_j \in S_j (j = 1, \cdots, n)\right] \quad (16)$$

を得る。

定義4.　$x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$ がプレイヤー P にとっての主観的ナッシュ均衡点である

$\Leftrightarrow x^*$ が $\tilde{G}_P$ のナッシュ均衡点である。つまり

$$\tilde{a}_i(x_1^*, \cdots, x_n^*) = \max_{x_i} \tilde{a}_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \cdots, x_n^*) \quad (17)$$

プレイヤー P としては、主観的ナッシュ均衡点 x^* を目指してそれの命じる戦略をとるべきである。

【参考文献】

1．T.Nakai,"Selection of a Desirable Equilibrium by Subjective Motive Distributions", Journal of Information and Optimization Sciences, Vol.25, No.2(2004), 373-383

2．Shigehito FURUYAMA & Teruhisa NAKAI," The construction of subjective games by motive distributions in n-person non-cooperative game", Journal of Information and Optimization Sciences, Vol.25, No.3(2004), 533-541