日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

ファジーゲームにおけるAubinコアの一般化

02502510　東京工業大学　＊福田恵美子　FUKUDA Emiko
01602970　東京工業大学　武藤滋夫　MUTO Shigeo
02005220　東京工業大学　石原慎一　ISHIHARA Shin-ichi

1. はじめに

ファジーゲームは，プレイヤーの部分的協力を表現できるように従来の特性関数形ゲームを拡張したものである．従来の特性関数形ゲームでは，提携 $S \subseteq N$ に含まれるプレイヤーは全員が完全な協力状態にあると仮定されているが，ファジーゲームにおいては，各プレイヤーは提携への参加レベルを選択することができる．

ファジーゲームに対するコア（Aubinコア）はAubin (1974) によって定義され，近年も，従来の特性関数形ゲームのコアとの比較などの研究がなされている．コアにおける各プレイヤーへの支払いが，プレイヤーの参加レベルに対する比例配分になっているという仮定が置かれていることが，このAubinコアの定義の特徴である．

ところで，従来の特性関数形ゲームでは，満場一致ゲーム（unanimity game）におけるコアは非空であるとの結果が知られている．しかし，Branzei et al. (2003) では，ファジー満場一致ゲーム（ファジーゲームでの満場一致ゲーム）におけるAubinコアが空になることがあると指摘されている．

本稿では，これを踏まえ，ファジーゲームにおける配分集合，Aubinコアの一般化をおこない，新たにp-コアを定義する．さらに，ファジー満場一致ゲームにおいて，あるp-コアは常に非空であることを示す．

2. ファジーゲームとAubinのコア

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ をプレイヤーの集合とするとき $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [0,1]^N$ をファジー提携という．ここで，各要素 s_i は，プレイヤー i が完全に協力する場合を $s_i = 1$，まったく協力しない場合を $s_i = 0$ としてプレイヤーの提携への参加レベルを表している．ファジーゲームは，プレイヤーの集合 N とすべてのファジー提携に対して提携値を与えた特性関数 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ の組 $\langle N, v \rangle$ で表される．また，すべての提携 $S \subseteq N$ は

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in S \\ 0 & \text{if } i \notin S \end{cases}$$

なるファジー提携 e^S として表現できることからもファジーゲームは従来の特性関数形ゲームの拡張になっていることがわかる．

ファジー満場一致ゲームはつぎのように定義される．

定義　すべての i について $t_i > 0$ なる，あるファジー提携 $t = (t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^N$ があって，

$$v(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s_i \geq t_i \text{ for all } i \in N \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を満たすとき，v をファジー満場一致ゲームという．ここで，t は閾値と呼ばれる．

閾値 t を持つファジー満場一致ゲームを u_t と書く．

Aubin (1974) は配分集合およびコアを以下のように定義した．

$$I(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(e^N),\ x_i \geq v(e^i)\ \forall i \in N\}$$

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid \sum_{i \in N} s_i x_i \geq v(s)\ \forall s \in [0,1]^n\}$$

コアにおける支払いが，参加レベルに対して比例配分になっていることに注意されたい．

3. p-コア

Aubinコアの一般化に際して，まず $p(0) = 0$ かつ $p(1) = 1$ となる $[0,1]$ 上の関数 $p : [0,1] \to [0,1]$ を考える．$a \leq b$ となる任意の $a, b \in [0,1]$ に対して $p(a) \leq p(b)$ が満たされるとき，p を単調であるといい，単調な p の集合を $\mathbb{P}$ で表す．

$$\mathbb{P} = \left\{ p : [0,1] \to [0,1] \;\middle|\; \begin{array}{l} p(0) = 0,\ p(1) = 1, \\ p : \text{単調} \end{array} \right\}.$$

ここで，p は部分的協力がなされたときの支払計画になっている．すなわち，プレイヤー i が完全に協力をしたとき x_i だけ配分を得られるとき，このプレイヤーが s_i の参加レベルで協力したときに $p(s_i)x_i$ だけ得られるとした支払計画になっている．

こうした支払計画 p を所与として，p に基づいたコア（p-コア）を以下のように定義する．

$$C_p(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(e^N), \\ \sum_{i \in N} p(s_i) x_i \geq v(s) \\ \quad \forall s \in [0,1]^N \end{array} \right\}$$

Aubin コアは $p(s_i) = s_i$ のときの p-コアになっている．

Aubin コアは支払いがプレイヤーの参加レベルに対して比例配分になっている場合のみを考えていたが，p-コアは，より多くの形態の支払計画を考えることができる．

ここに，二つの特徴的な支払計画を挙げる．一つ目は，プレイヤーが完全に協力をおこなったときにのみ，すなわち $s_i = 1$ のときにのみ配分 x_i を与えるもので，p^- とする．もう一つは，プレイヤーが協力しはじめた段階で，x_i 全額支払うというものである．これを p^+ とする．

p^-，p^+ はそれぞれ以下のように表せる．

$$p^-(s_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } s_i = 1 \\ 0 & \text{for } 0 \leq s_i < 1 \end{cases}$$

$$p^+(s_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < s_i \leq 1 \\ 0 & \text{for } s_i = 0 \end{cases}$$

4. ファジー満場一致ゲームにおける p-コアの非空性

前述の通り，ファジー満場一致ゲームにおける Aubin コアは空になる可能性が Branzei et al. (2003) で指摘されている．しかし，今回導入した p-コアの概念を用いれば，$p = p^+$ のときのファジー満場一致ゲームのコア（p-コア）の非空性を示すことができる．

定理　u_t をプレイヤー集合 $N = \{1, \ldots, n\}$ をもつファジー満場一致ゲームとする．$p = p^+$ のとき，このファジー満場一致ゲームの p-コアは非空である．すなわち，$C_{p^+}(u_t) \neq \emptyset$ が成り立つ．

5. プロパーコアとクリスプコアの一般化

ここでは，ファジーゲームに対して定義されている Aubin コア以外のコアであるプロパーコアとクリスプコアを取り上げ，前節までと同様 p を用いて一般化をおこなう．

$s \in [0,1]^N$ に対し $car(s) = \{i \in N \mid s_i > 0\}$ とする．$car(s) \neq N$ のとき，s をプロパーファジー提携といい，プロパーファジー提携の集合を PF^N で表す．ファジーゲーム v のプロパーコア $C^P(v)$，クリスプコア $C^{cr}(v)$ は各々以下のように定義される．

$$C^P(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(e^N), \\ \sum_{i \in N} s_i x_i \geq v(s) \;\forall s \in PF^N \end{array} \right\}.$$

$$C^{cr}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(e^N), \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(e^S) \;\forall S \in 2^N \end{array} \right\}.$$

プロパーコアではプロパーファジー提携においてのみ，クリスプコアではクリスプ提携 e^S においてのみ，提携安定性を考慮している．

Aubin コアのときと同様に，プロパー p-コア $C_p^P(v)$，クリスプ p-コア $C_p^{cr}(v)$ は以下のように一般化できる．

$$C_p^P(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(e^N), \\ \sum_{i \in N} p(s_i) x_i \geq v(s) \;\forall s \in PF^N \end{array} \right\}$$

and the crisp p-core, i.e.,

$$C_p^{cr}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = v(e^N), \\ \sum_{i \in S} p(1) x_i \geq v(e^S) \;\forall S \in 2^N \end{array} \right\}.$$

Aubin コア，プロパーコア，クリスプコアと，各々を一般化したものについて以下の定理が成り立つことを示した．

定理　v をファジーゲームとする．

(1) 任意の $p, p' \in \mathbf{P}$ に対して，$p(a) \leq p'(a) (\forall a \in [0,1])$ ならば $C_p(v) \subseteq C_{p'}(v)$ かつ $C_p^P(v) \subseteq C_{p'}^P(v)$.

(2) 任意の $p \in \mathbf{P}$ に対して $C_p(v) \subseteq C_p^P(v) \subseteq C^{cr}(v)$.

(3) $C_{p^+}(v) = C_{p^+}^P(v) = C^{cr}(v)$.

6. まとめ

本稿では，支払計画に比例配分の仮定を課している Aubin コアを一般化し，新たに p-コアを定義した．この p-コアの概念を用いて，ファジー満場一致ゲームにおける p^+-コアの非空性を示した．また，同様にプロパーコアとクリスプコアも一般化し，関係性を明らかにした．