日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

密輸実施強制モデルによる取締ゲーム

01504810　防衛大学校　宝崎隆祐　HOHZAKI Ryusuke

1．はじめに

国際原子力機関（ＩＡＥＡ）のような国際機関による核査察や税関による密輸行為の取締活動といった問題に対し，Inspection ゲームを使った分析が 1960 年代から行われている．前回の発表 [1] では，密輸団対税関の取締問題に対しプレイヤーの任務達成確率を組み込み，密輸成功や摘発によるゲームの途中終了等様々な状態変化を可能にする確率ゲームモデルについて報告した．今回は，資金上及び意思決定上の事情により複数回実施予定の密輸行為を是が非でも決行せざるを得ない状況下での取締ゲームを考える．

2．問題と定式化

ここでは，パトロールを実施する税関をプレイヤーＡ，密輸を行おうとする密輸団をプレイヤーＢとする次のような２人ゼロ和多段ゲームを考える．

(1) プレイヤーＡ，Ｂが１日に１回のアクションをとる全体で N 日の多段ゲームを考える．ゲームのステージ数を残り日数により表す．(2) プレイヤーＡは最大で K 日のパトロールを実施可能であり，プレイヤーＢは L 日の密輸を実施することが強制されている．(3) １回のアクションに際し，プレイヤーＡはパトロールを実施する (P) か否 (NP) かの２つの戦略をもち，プレイヤーＢは密輸を行う (S) か否 (NS) かの同じく２つの戦略をもつ．
(4) プレイヤーＢの密輸決行日に実施されるパトロールにより，確率 p_1 でプレイヤーＢの摘発が可能であるが，密輸が成功することも確率 p_2 で起こる．またどちらの事象も生じない場合もあり，$p_1+p_2 \leq 1$ である．パトロールが未実施なら，密輸は必ず成功する．(5) 摘発によるプレイヤーＡの利得は $\alpha>0$ であり，密輸成功によるプレイヤーＢの利得は１であるが，両者の利得にはゼロ和が成立するとし，ゲームの支払をプレイヤーＡの利得で考える．また，$\alpha p_1-p_2>0$ を仮定する．(6) プレイヤーＢの摘発が起きない場合は次の日のゲームに移る．摘発により，または残り日数が尽きた場合にゲームは終了する．

残り日数 n 日のステージにおいて，最大可能パトロール回数 k，密輸実施回数 l のゲームを $\Gamma(n,k,l)$ とし，そのゲームの値を $v(n,k,l)$ で表すと，期待利得やゲームの状態推移から $v(n,k,l)$ は次のような漸化式により評価できる．

$$v(n,k,l)=val\begin{pmatrix} \alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,l-1) & v(n-1,k-1,l) \\ -1+v(n-1,k,l-1) & v(n-1,k,l) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ただし，記号 val はそれに続く行列ゲームの値を表すが，２つの行はプレイヤーＡの戦略｛パトロールを実施 (P)，未実施 (NP)｝を，２つの列はプレイヤーＢの戦略｛密輸を実施 (S)，未実施 (NS)｝に対応する．また $n=l$ の場合には密輸実施が強制されるため，密輸未実施 (NS) の戦略をもたない次のような２行１列のゲームを考えればよい．

$$\begin{aligned} v(n,k,n) &= val\begin{pmatrix} \alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,n-1) \\ -1+v(n-1,k,n-1) \end{pmatrix} \\ &= \max\{\alpha p_1-p_2+(1-p_1)v(n-1,k-1,n-1),\ -1+v(n-1,k,n-1)\}. \end{aligned} \tag{2}$$

したがって，ゲーム $\Gamma(n,k,l)$ は初期条件 $v(0,k,l)=0$, $v(n,k,0)=0$, $v(n,0,l)=-l$ から，漸化式 (1), (2) による繰返計算により容易に解くことができる．混合戦略を表すため，プレイヤーＡが戦略 P をとる確率を x_1，プレイヤーＢが戦略 S をとる確率を y_1 としよう．

3．ゲームの解と性質

$l=n$ 及び $k=n$ の特殊な場合には，ゲームは次のような閉じた形の解をもつ．ただし，証明は省略する．

定 理 1 $l=n$ であるゲーム $\Gamma(n,k,n)$ においては，ステージ n におけるプレイヤーＡの最適戦略は $x_1^*=1$（ただし $k=0$ を除く）であり，ゲームの値 $v(n,k,n)$ は次の関数 $f(n,k)$ により与えられる．

$$f(n,k)\equiv\frac{\alpha p_1-p_2}{p_1}\left\{1-(1-p_1)^k\right\}-(n-k)(1-p_1)^k. \tag{3}$$

もちろん，この場合のプレイヤーＢは「密輸実施 (S)」以外の手をとることはできない．

定 理 2 $k=n$ であるゲーム $\Gamma(n,n,l)$ においては，ステージ n におけるプレイヤーＡの最適戦略は $x_1^*=1$ であり，プレイヤーＢの戦略は任意である．また，ゲームの値は n に依存しない次の関数 $g(l)$ により与えられる．

$$g(l)\equiv\frac{\alpha p_1-p_2}{p_1}\left\{1-(1-p_1)^l\right\}. \tag{4}$$

また，ゲームの値及び (1) 式の行列ゲームの要素間の大小関係には次のような性質がある．

補　題 1 ゲームの値に関し次の性質が成り立つ．

(i) k に関する非減少性： $v(n-1,k-1,l) \le v(n-1,k,l)$.

(ii) 行列ゲーム *(1)* 式の要素間には一般的に次のような大小関係が成り立つ．

$$\alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1) \;\ge\; v(n-1,k-1,l), \tag{5}$$

$$-1 + v(n-1,k,l-1) \;\le\; v(n-1,k,l), \tag{6}$$

$$\alpha p_1 - p_2 + (1-p_1)v(n-1,k-1,l-1) \;>\; -1 + v(n-1,k,l-1)\ . \tag{7}$$

(iii) ステージ数 n に対する非増加性： $v(n-1,k,l) \ge v(n,k,l)$.

性質 (i) は自明であり，(iii) は残り日数増加がプレイヤーAへのデメリットとなる性質を述べたものである．性質 (ii) により行列ゲーム (1) 式は混合戦略を最適解にもつため，漸化式 (1) の評価は簡単な数値計算となる．またこの性質から，$l=1$ の特殊ケースに対するプレイヤーの最適戦略は次のように一様戦略になり，ゲームの値も閉じた形で得られる．

定 理 3 $l=1$ の場合，ゲームの値は次式で与えられる．

$$v(n,k,1) = \frac{k}{n}(\alpha p_1 - p_2 + 1) - 1\ . \tag{8}$$

また，このステージにおける最適混合戦略は，$k<n$ の場合には $x_1^* = k/n$, $y_1^* = 1/n$ で，$k=n$ の場合には $x_1^* = 1$, $y_1^* = 0$ で与えられる．

4．数値例

$\alpha = 2$, $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.3$ とし，残り日数 $n = 1, \cdots, 4$ 及び可能最大パトロール回数 k, 密輸回数 l のすべての組合せに対しゲームの値を示したのが表 1，ステージ n における最適混合戦略 (x_1^*, y_1^*) を示したのが表 2 であり，上述した定理の成り立っていることが確認できる．また，表 1 により，l の増加とともにゲームの値が減少傾向から増加に転向する点の存在や，両プレイヤーの勝敗を分けるゲームの値 0 の境界が明瞭に認められる．

表 1．ゲームの値

n	k	l=1	2	3	4
1	0	-1			
	1	0.7			
	0	-1	-2		
	1	-0.15	0.20		
	2	0.70	1.05		
3	0	-1	-2	-3	
	1	-0.43	-0.64	-0.30	
	2	0.13	0.40	0.80	
	3	0.70	1.05	1.23	
4	0	-1	-2	-3	-4
	1	-0.58	-1.00	-1.19	-0.80
	2	-0.15	-0.15	0.06	0.55
	3	0.28	0.54	0.83	1.10
	4	0.70	1.05	1.23	1.31

表 2．最適戦略

n	k	l=1	2	3	4
1	0	(0, 1)			
	1	(1, 1)			
2	0	(0, 1)	(0, 1)		
	1	(.50, .50)	(1, 1)		
	2	(1, 0)	(1, 1)		
3	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	
	1	(.33, .33)	(.38, .62)	(1, 1)	
	2	(.67, .33)	(.76, .48)	(1, 1)	
	3	(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	
4	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
	1	(.25, .25)	(.27, .45)	(.33, .67)	(1, 1)
	2	(.50, .25)	(.53, .44)	(.67, .53)	(1, 1)
	3	(.75, .25)	(.79, .38)	(.92, .33)	(1, 1)
	4	(1, 0)	(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)

参考文献

[1] 工藤大介, 宝崎隆祐, 小宮享, 日本ＯＲ学会 2003 年秋季研究発表会アブストラクト集, pp.242-243, 2003.9.