

2 段階搜索計画における精査所要時間が一定の場合の解の性質

01110110 防衛大学校 \*小宮 享 KOMIYA Toru  
01504810 防衛大学校 宝崎隆祐 HOHZAKI Ryusuke

1. 2 段階搜索での精査資源配分問題と本研究の目的

搜索者が保有する搜索センサの有効搜索範囲に比べて非常に大きな目標空間を搜索する際には、安価な搜索手段で目標空間を高速に搜索し、目標の兆候(コンタクトと呼ぶ)を得たあと、そのコンタクトを精密に調べ目標の発見に至る搜索手法がしばしば用いられる。この2段階の搜索で前者を広域搜索、後者を精査と呼ぶ。広域搜索では高速に搜索するために真目標の見逃しや偽目標やシステムノイズ等による虚探知の混在が避けられない。真目標や偽目標のコンタクトは、ある時間の精査後に実体が判明するのが普通である。システムノイズによるコンタクトは、信号の再現性がないため精査により何の情報も得られない。従って、ノイズコンタクトが混在する環境では適当な時間で精査を打ち切って再び広域搜索に復帰する必要がある。

前回の報告 [1] では広域搜索において真目標、偽目標及びノイズコンタクトが混在する状況を想定し、精査終了までの所要時間を指数分布とし、精査終了時点で2種類の過誤(第1種:真目標を偽目標と誤認、第2種:偽目標を真目標と誤認)を犯す可能性も考慮したモデルについて検討した。しかし実際の精査を考えると、バッチ処理等、一定時間で精査が終了する状況も多々見受けられる。今回の報告では精査の所要時間が一定の場合の解の性質について考察する。

2. 最適精査資源配分計画問題のモデル化

モデルの前提及び変数は以下のとおりである。

1. 目標空間に存在する1つの目標に対し、搜索者は総搜索時間  $T$  の搜索を実施する。 $T$  は任意に分割可能とする。残り搜索時間が  $t$  のときを、時点  $t$  と呼ぶ。
2. 広域搜索における単位搜索時間あたりのコンタクト生起率を  $\lambda$  とする。
3. コンタクトは探知信号の特徴により  $m$  個のクラスに区分される。得られたコンタクトがクラス  $i$  である確率は  $p_{Ci}$ 、 $\sum_{i=1}^m p_{Ci} = 1$  で与えられ、搜索者に既知とする。
4. クラス  $i$  のコンタクトが真目標、偽目標又はノイズである確率はそれぞれ  $p_{Ti}$ 、 $p_{Fi}$ 、 $p_{Ni}$ 、で与えられ、搜索者に既知とする。(  $p_{Ti} + p_{Fi} + p_{Ni} = 1$  )
5. 広域搜索において時点  $t$  でコンタクトを得れば、搜索者は予め決定した精査時間の上限  $\tau_i(t)$  を目途に直ちにその精査を行う。
6. 真、偽、ノイズコンタクトそれぞれに対する一定精査時間(分布)をそれぞれ  $t_{Ti}$ 、 $t_{Fi}$ 、 $t_{Ni}$  ( $< t$ ) とし既知とする。 $\tau_i(t)$  内で判定不能の際は、広域搜索に復帰する。なお精査中は新たなコンタクトは生起しないとする。

7.  $t_{Ti}$ 、 $t_{Fi}$ 、 $t_{Ni}$  ( $< t$ ) 後に判定可能な確率を  $J_{Ti}$ 、 $J_{Fi}$ 、 $J_{Ni}$  とし既知とする。
8. 時点  $t$  で得たクラス  $i$  のコンタクトに対し  $\tau_i(t)$  の精査を実施し、以後最適に行動する時の条件付目標発見確率を  $G_i(t, \tau_i(t))$ 、 $t$  で未コンタクトで以後最適に行動する時の目標発見確率を  $P(t)$  とする。
9. 搜索者が精査終了時に第1種、第2種の過誤を犯す確率を  $a_T$ 、 $a_F$  とする。第2種の過誤を犯すと、特定の密度関数  $g(x)$  に従うペナルティ時間  $x$  が無駄に費やされ、その後広域搜索に復帰する。 $a_T$ 、 $a_F$  は時点によらず一定であると仮定する。
10. 全搜索時間  $T$  に対し目標発見確率  $P(T)$  を最大にする各時点  $t$  での最適精査時間の列  $\{\tau_i^*(t), i=1, \dots, m, 0 \leq t \leq T\}$  について検討する。

以前の分析 [1] では、精査終了と真偽判定とを同一の概念として扱っていた。一方、精査時間一定とする場合は、各コンタクトに対する精査時間以上の  $\tau_i(t)$  の設定で確実に精査は終了するが真偽判定とは区別できない。そのため今回の検討では、新たに前提7を追加した。

3. 定式化及び解法

微小な状態変化  $[t + \Delta t, t]$  の間での生起事象を考えれば次式が成り立つ。

$$P(t + \Delta t) = \{1 - \lambda \Delta t\} P(t) + \lambda \Delta t \sum_{i=1}^m p_{Ci} G_i(t, \tau_i^*(t)). \tag{1}$$

上式より次の  $P(t)$  に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \lambda \{ \sum_{i=1}^m p_{Ci} G_i(t, \tau_i^*(t)) - P(t) \}. \tag{2}$$

初期条件:  $P(0) = G_i(0, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$ .

なお  $G_i(t, \tau_i(t))$  の最適値  $G_i(t, \tau_i^*(t))$  は以下の式で表される。次式では  $\tau_i(t)$  を  $\tau_i$  と略記する。

$$\begin{aligned} G_i(t, \tau_i^*) &= \max_{0 \leq \tau_i \leq t} G_i(t, \tau_i) \\ &= \max_{0 \leq \tau_i \leq t} p_{Ti} J_{Ti} (1 - a_T) + p_{Ti} J_{Ti} a_T P(t - t_{Ti}) \\ &\quad + p_{Fi} J_{Fi} (1 - a_F) P(t - t_{Fi}) \\ &\quad + p_{Fi} J_{Fi} a_F \int_0^{t-t_{Fi}} g(x) P(t - t_{Fi} - x) dx \\ &\quad + p_{Ni} (1 - J_{Ni}) P(t - \tau_i(t)) \\ &\quad + p_{Fi} (1 - J_{Fi}) P(t - \tau_i(t)) \\ &\quad + p_{Ni} P(t - \tau_i(t)). \\ &= \max_{0 \leq \tau_i \leq t} \left\{ TT + TF + FF + FT \right. \\ &\quad \left. + P(t - \tau_i(t)) [1 - p_{Ti} J_{Ti} - p_{Fi} J_{Fi}] \right\} \tag{3} \end{aligned}$$

式(3)の  $TT, TF, FT, FF$  の各項は真(偽)コンタクトを真(偽)目標と判定する場合の発見確率を順番に略記しており、いずれも  $\tau_i(t)$  に依存しない項である。ただし、 $\tau_i(t)$  が各コンタクトに対する精査時間  $t_{Ti}, t_{Fi}, t_{Ni}$  以上でないと精査が終了せず真偽が判定されないこと、また、残り時間が正でないと検索が行えないことから式(3)の各項に意味をもたせるために次の条件を設ける。  
 $0 < t_{Ti}, t_{Fi} < t, 0 < t_{Ti}, t_{Fi}, t_{Ni} < \tau_i(t), P(0 \text{ or 負}) = 0$  (4)

各  $t, i$  に対し式(3)を極大化する  $\tau_i^*$  を求め、式(2)の初期条件のもと微分方程式を解けば最終的な  $P(T)$  及び精査計画  $\{\tau_i^*(t)\}$  が求まる。連続的な解析が困難なため、時間を離散化した次のアルゴリズムに従い数値解を求める。なお、離散化した時点での関数を  $P_t = P(t), G_{i,t}(\tau_{i,t}) = G_i(t, \tau_i(t)), G_{i,t}^* = \max_{0 \leq \tau_i \leq t} G_i(t, \tau_i(t))$  と表記する。

[離散時点アルゴリズム]

- 1 離散時点指標  $t = 0$  とおく。  
 $P_{t=0} = 0, G_{i,t=0}^* = 0, (i = 1, \dots, m)$  とおく。
- 2 クラス  $i = 1$  とする。
- 3  $\tau_{i,t} = 0, \tau_{i,t}^* = 0, G_{i,t}^* = G_{i,t}(\tau_{i,t} = 0) = P_t$  とおく。
- 4  $G_{i,t}(\tau_{i,t})$  を計算し、 $G_{i,t}(\tau_{i,t}) > G_{i,t}^*$  ならば  $\tau_{i,t}^* = \tau_{i,t}, G_{i,t}^* = G_{i,t}(\tau_{i,t})$  とする。
- 5  $\tau_{i,t} < t$  ならば  $\tau_{i,t} = \tau_{i,t} + 1$  として 4 に戻る。
- 6  $i < m$  ならば  $i = i + 1$  として 3 に戻る。  
 $i \geq m$  ならば  $G_{i,t}^*, P_t$  より  $P_{t+1}$  を求める。
- 7  $t < T$  ならば  $t = t + 1, i = 1$  として 3 に戻る。  
 $t \geq T$  ならば 計算終了。

4.  $G_i(t, \tau_i(t))$  の不連続性と最適精査時間

上記アルゴリズムで各時点  $t$  における  $G_{i,t}^*$  の初期設定は  $P_t$  であり、式(2)で表現される  $P(t)$  の増分と併せて考えると各時点  $t$  で式(2)の値は正又は0であり、 $P_t$  は広義の増加関数であることが分かる。簡単のため  $t_{Ti} = t_{Fi}$  として  $\tau_{i,t}$  と  $t_{Ti}(= t_{Fi})$  の大小と  $G_{i,t}$  との関係について考察する。(  $t_{Ti} \neq t_{Fi}$  でも同様の考察が成り立つ。 )

(i)  $0 < \tau_{i,t} < t_{Ti}$  のとき

式(3)において  $TT \sim FT$  の各項は十分な精査時間が与えられないため0である。

$$G_{i,t}(\tau_{i,t}) = P_{t-\tau_{i,t}} [1 - p_{Ti} J_{Ti} - p_{Fi} J_{Fi}] (\equiv NJ)$$

(ii)  $t_{Ti} = \tau_{i,t}$  となる時点以降

$TT \sim FF$  はいずれも非負定値を持つようになる。

$$G_{i,t}(\tau_{i,t}) = TT + TF + FF + FT + NJ$$

すなわち、この時点以降  $G_{i,t}(\tau_{i,t})$  には増加項が加わる。

$P_t$  が  $t$  の増加関数なので、 $G_{i,t}(\tau_{i,t})$  はある  $t$  に対し  $\tau_{i,t}$  の減少関数である。これより  $G_{i,t}(\tau_{i,t})$  を極大にする点の候補は  $\tau_{i,t} = 0$  もしくは不連続な増分が生じる  $\tau_{i,t} = t_{Ti}$  である。前回の検討 [1] では、 $\partial G_i(t, \tau_i(t)) / \partial \tau_i(t) |_{\tau_i(t)=t}$  は常に正となり、端点  $\tau_i(t) = t$  も  $G_i(t, \tau_i(t))$  を極大とする候補の一つであったが、今回は右端の  $\tau_i(t) = t$  では勾配  $\partial G_i(t, \tau_i(t)) / \partial \tau_i(t) = 0$  となり極大の候補とならない。これより次の定理が導かれる。

[定理] 最適精査時間  $\tau_i^*(t)$  は次式の解である。

$$G_{i,t}(\tau_{i,t}^*) = \max\{G_{i,t}(t_{Ti}), P_t\}$$

すなわち、 $\tau_i^*(t) = \{t_{Ti}, 0\}$  である。

5. 数値例

以下のパラメタ値で数値実験を行った。

$T = 100, \lambda = 0.05$  [回/単位時間],  $a_T = a_F = 0.4$

第2種の過誤を犯した際のペナルティ時間:

一定時間:  $g(x) = \delta(x - 30)$  (30 単位時間)

コンタクトクラス数を  $m = 4$  とし各クラスのパラメタ値をそれぞれ以下の表の値に設定する。

表 1: パラメタ値

| class | $(p_{Ti}, p_{Fi}, p_{Ni})$ | $t_{Ti}$ | $t_{Fi}$ | $J_{Ti} = J_{Fi}$ | $pc_i$ |
|-------|----------------------------|----------|----------|-------------------|--------|
| 1     | (0.1, 0.4, 0.5)            | 20       | 23       | 0.1               | 1/4    |
| 2     | (0.2, 0.3, 0.5)            | 15       | 18       | 0.2               |        |
| 3     | (0.3, 0.2, 0.5)            | 10       | 13       | 0.3               |        |
| 4     | (0.4, 0.1, 0.5)            | 5        | 8        | 0.4               |        |

$t = 20 \sim 100$  のときのクラス2の  $G_{2,t}(\tau_{2,t})$  を図1に示す。 $t$  によらず  $G_{2,t}(\tau_{2,t})$  が極大となる点が  $\tau_{2,t} = 0, t_{T2}$  で拮抗している様子がうかがえる。この極大値を与える点が  $\tau_{2,t}^*$  である。図2は各クラスのコンタクトに対する最適精査計画であり、クラス2のコンタクトに対しては  $25 < t < 30$  付近では精査を実施しない計画が最良であることがわかる。また、精査時間を要し、真である確からしさ・判定終了確率が低いクラス1のコンタクトに対しては、 $t$  の大小によらず精査を実施しないことが最適であることが示されている。他のクラス3,4は  $G_{i,t}(\tau_{i,t})$  であり、その一定時間を精査に費やせばよいことが分かる。

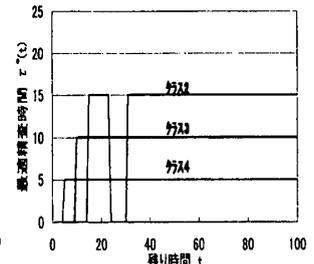
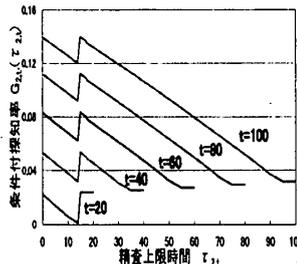


図 1: 条件付探知率  $G_{2,t}(\tau_{2,t})$  図 2: 最適精査時間  $\tau_{i,t}^*$

他のパラメタ設定での計算例は発表当日に報告する。

6. まとめ

本報告では精査所要時間が一定の場合に目標探知確率を最大化する最適精査時間に関する性質を調べ、精査を実施しない ( $\tau_i(t) = 0$ ) もしくは真目標に対する一定精査時間 ( $\tau_i(t) = t_{Ti}$ ) だけ精査を実施すべきであることが分かった。

参考文献

[1] 小宮, 飯田, 宝崎: 日本 OR 学会 2003 年度春季研究発表会アブストラクト集, pp.144-145, 2003.3