日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

制約付最適点検問題の近似手続きについて

尾崎達也 †, 土肥正 (01307065) †, 海生直人 (01105445) ‡
† 広島大学大学院工学研究科, ‡ 広島修道大学経済科学部

1. はじめに

無限計画期間における故障の発見を目的とした最適点検問題は Barlow *et al.* [1] によって定式化され，その後様々な近似計算アルゴリズムが提案されている．Keller [2] は単位時間当りの点検回数を点検濃度と呼ばれる連続関数で近似し，非線形計画問題を変分問題に帰着させて解く方法を提案した．Kaio and Osaki [3] は Keller [2] の方法を一部改良し，より簡便に準最適点検時刻列を生成することに成功した（最適点検問題における近似計算アルゴリズムの比較については文献 [4] を参照）．一方，Yamada and Osaki [5] は Keller [2] による単純な期待費用最小化問題を等式制約をもつ期待費用最小化問題に置き換え，異なる評価規範の下で準最適点検方策を求める方法について考察した．本稿では，文献 [5] の結果を文献 [3] の意味で一般化し，制約付点検問題の近似アルゴリズムを再構築する．さらに，問題を有限計画期間問題に拡張し，制約付点検問題に対する新しい準最適点検アルゴリズムを導出する．

2. 最適点検モデル

時刻 $t=0$ で動作を開始する 1 ユニットシステムを考える．システムの点検は任意の時刻列（点検列）$\{t_1, t_2, \cdots\}$ においてなされ，故障の有無は点検時刻列においてのみ同定される．システムが故障するまでの時間は密度 $f(t)$，平均 $1/\mu\ (>0)$ の連続形確率分布 $F(t)$ に従うものとする．各点検時刻列 $t_j\ (j=1,2,\cdots)$ においてそれぞれ点検費用 $c_1\ (>0)$ が発生し，システムダウンによる損失費用は故障時点から次の点検時刻までの時間 t の関数 $L(t)$ として定義される．ここで，関数 $L(\cdot)$ は 1 階微分可能な非負値の単調増加関数とする．いま，点検時刻列を $\mathbf{t}_\infty=\{t_1,t_2,t_3\cdots\}$ とすれば，Barlow *et al.* [1] による最適点検問題は

$$\min_{\mathbf{t}_\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\int_{t_j}^{t_j+1} g_j(t_{j+1},t)dF(t), \quad t_0=0. \tag{1}$$

ここで，$g_j(x,y)=c_1(j+1)+L(x-y)$ および $t_{j-1}<t_j\ (j=1,2,\cdots)$ である．よく知られた結果として，$F(t)$ が指数分布に従うならば最適点検時刻列は等間隔，すなわち $t_1-t_0=t_2-t_1=t_3-t_2=\cdots=t_{j+1}-t_j=\cdots$ となり，$F(t)$ が PF_2 (Pólya Frequency Function of Order 2) ならば最適点検時刻列 $\mathbf{t}_\infty$ は非増加列となる．この問題は制約付の非線形計画問題であり，準 Newton 法など既存のパッケージを利用したとしても，解が初期値に大きく依存し極めて不安定であることが報告されている．

Keller [2] は点検濃度 $D(t)$ を導入することにより，式 (1) の非線形計画問題を次のような変分問題として近似することを提案している．まず，時刻 t で故障が発生したという条件下で，無限計画期間における期待点検費用は $c_1\int_0^t D(x)dx$ となり，故障時刻 t における期待損失費用は近似的に

$$D(t)\int_0^{D(t)^{-1}} L(x)dx \approx L(1/2D(t)) \tag{2}$$

と表現できる．Keller [2] は

$$X(t)=\int_0^t D(x)dx \tag{3}$$

の媒介変数を導入することにより，次のような変分問題を考察した．

$$\min_{X(t)}\int_0^\infty \Big\{c_1X(t)+L(1/2X'(t))\Big\}dF(t). \tag{4}$$

ここで，$X'(t)=dX(t)/dt$ である．これに対して，Kaio and Osaki [3] は直接

$$\min_{D(t)}\Big\{\int_0^\infty c_1D(t)\overline{F}(t)dt+\int_0^\infty L(1/2D(t))dF(t)\Big\} \tag{5}$$

を解くことで，簡便に最適点検濃度並びに準最適点検時刻列を求めている．

最終的に，準最適な点検時刻列 $\mathbf{t}_\infty^*=\{t_1^*,t_2^*,\cdots\}$ は，最適点検濃度 $D^*(t)$ を用いて

$$j=\int_0^{t_j} D^*(t)dt, \quad j=1,2,\cdots \tag{6}$$

を満たすよう決定される．Barlow *et al.* [1] によって考察されたように，故障が一様分布に従って発生し，$L(t)=c_2t\ (c_2>0)$ のような線形損失関数が仮定されるならば，Kaio and Osaki [3] による準最適点検時刻列は真の最適解に一致するが，Keller [2] の準最適解はそれらを過大評価することが容易に確認できる．

3. 制約付最適点検モデル

Yamada and Osaki [5] は Barlow *et al.* [1] の最適点検問題とは異なる点検問題を Keller [2] による近似アルゴリズムの枠組みで論じている．すなわち，期待点検費用と期待損失費用の総和を最小にするのではなく，期待点検費用を一定レベル $A\ (>0)$ に保持したままで期待損失費用を最小にする次のような問題を考えた．

$$\min_{D(t)}\int_0^\infty [c_2/D(t)]dF(t)$$

$$\text{s.t.} \int_0^\infty c_1 X(t)dF(t) = A. \tag{7}$$

この問題も一般線形損失関数 $L(\cdot)$ と式 (2) の近似表現を用いて以下のように再定式化できる.

$$\min_{D(t)} \int_0^\infty L(1/2D(t))dF(t)$$
$$\text{s.t.} \int_0^\infty c_1 D(t)\overline{F}(t)dt = A. \tag{8}$$

式 (8) の制約付最小化問題に Lagrange 乗数 γ を導入すると,

$$\min_{D(t)} \left\{ \int_0^\infty L(1/2D(t))dF(t) + \gamma\left[\int_0^\infty c_1 D(t)\overline{F}(t)dt - A\right]\right\} \tag{9}$$

となるので, これに対する Euler 方程式は

$$-\frac{L'(1/2D(t))f(t)}{2D^2(t)} + \gamma c_1 \overline{F}(t) = 0 \tag{10}$$

となる. これを $D(t)$ について解くことにより,

$$D^*(t) = \sqrt{\frac{L'(1/2D(t))r(t)}{2\gamma c_1}} \tag{11}$$

を得る. ここで, $r(t) = f(t)/\overline{F}(t)$ は故障率である. 最終的に, 式 (11) の Lagrange 乗数は式 (8) の等式制約を満足するように決定され, 準最適点時刻検列は式 (6) によって与えられる.

特別な場合として, 線形損失関数 $L(t) = c_2 t$ が仮定されるとき, 以下の結果を得る.

定理 1: $L(t) = c_2 t$ のとき, 最適点検濃度は

$$D^*(t) = \frac{A\sqrt{r(t)}}{c_1 \int_0^\infty \sqrt{r(t)} \cdot \overline{F}(t)dt} \tag{12}$$

によって与えられる.

定理 1 の結果は Yamada and Ōsaki [5] の結果に一致し, このときの準最適点検時刻列 $\mathbf{t}_\infty$ は式 (6) に従って決定される.

4. 有限計画期間問題

次に, 有限計画期間 $T\ (> 0)$ において, 最適点検時刻列 $\mathbf{t}_N = \{t_1, t_2, \cdots, t_N\}$ を求める問題を考える. ここで, $N = \min\{n : t_{n+1} > T\}$ であり, 一般性を失うことなく $t_{N+1} = T$ を仮定する. この場合, 制約付最適点検問題は

$$\min_{\mathbf{t}_N} \sum_{j=0}^{N} \int_{t_j}^{t_j+1} L(t_{j+1} - t)dF(t)$$
$$\text{s.t.} \sum_{j=0}^{N} \int_{t_j}^{t_j+1} c_1(j+1)dF(t) = A \tag{13}$$

によって与えられ, この問題に対する近似問題は, 式 (3) の $X(t)$ を用いて

$$\min_{D(t)} \int_0^T L(1/2X'(t))dF(t)$$
$$\text{s.t.} \int_0^T c_1 X(t)dF(t) = A \tag{14}$$

となる. 式 (14) の制約付最小化問題に Lagrange 乗数法を適用すれば

$$\min_{D(t)} \left\{ \int_0^T L(1/2X'(t))dF(t) + \gamma\left[\int_0^T c_1 X(t)dF(t) - A\right]\right\} \tag{15}$$

となるので, 変分問題に対する Euler 方程式は

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{L'(1/2D(t))f(t)}{2D^2(t)}\right\} + \gamma c_1 f(t) = 0 \tag{16}$$

となる. これを $D(t)$ について解くことにより,

$$D^*(t) = \sqrt{\frac{L'(1/2D(t))f(t)}{2c_1\gamma[\beta - F(t)]}} \tag{17}$$

を得る. ここで β は $\beta > F(T)$ を満たす正定数であり, $X(T) = N + 1$ の関係を満足する.

特別な場合として, 線形損失関数 $L(t) = c_2 t$ が仮定されるとき, 式 (14) の等式制約は

$$c_1 \int_0^T \sqrt{\frac{c_2 f(t)}{2c_1\gamma[\beta - F(t)]}} \cdot \overline{F}(t)dt = A \tag{18}$$

となる. 式 (18) を式 (17) に代入することにより以下の定理を得る.

定理 2: $L(t) = c_2 t$ のとき, 有限計画期間問題における最適点検濃度は

$$D^*(t) = \frac{A\sqrt{f(t)/[\beta - F(t)]}}{c_1 \int_0^T \sqrt{f(t)/[\beta - F(t)]} \cdot \overline{F}(t)dt} \tag{19}$$

の関係を満足する. 但し, $\beta > F(T)$ である.

よって, 任意の N に対して $\beta > F(T)$ を満たす β 及び $D^*(t)$ を導出し, 目的関数を最小にする N とそのときの β を求める問題に帰着される. ここで明らかに, $T \to \infty$ のとき $\beta \to 1$ となり, 式 (19) は式 (12) に一致する. また, 有限計画期間問題の場合, $F(t)$ が指数分布であっても最適点検時刻列 $\mathbf{t}_N$ は一定間隔ではないことを容易に示すことができる.

参考文献

[1] R. E. Barlow, L. C. Hunter and F. Proschan (1963), Optimum checking procedures, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **11**, 1078–1095.

[2] J. B. Keller (1974), Optimum checking schedules for systems subject to random failure, *Mgmt. Sci.*, **21**, 256–260.

[3] N. Kaio and S. Osaki (1984), Some remarks on optimum inspection policies, *IEEE Trans. Reliab.*, **R-33**, 277–279.

[4] N. Kaio and S. Osaki (1989), Comparison of inspection policies, *J. Opl. Res. Soc.*, **40**, 499–503.

[5] S. Yamada and S. Osaki (1977), Optimum number of checks in checking policy, *Microelectron. Reliab.*, **16**, 589–591.