日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

TUゲームを用いた提携構造の安定性分析

慶応義塾大学大学院経済学研究科　原田崇史　HARADA Takashi

1　はじめに

各プレイヤーが提携構造つきゲームのある一点解 (特に Aumann-Dréze 値) を共通に用いて、提携構造の評価をし、その評価値の比較によって提携構造の安定性を定義、分析することを試みる。

以下のモデルは、戦略形 (非協力) モデルを用いた同様の分析に比べ、簡明な構造を持っていると思われる。(しかしながら各プレイヤーの戦略的な意思決定の様子は暗に取り入れられている。)

本発表では、モデルの設定と安定性の定義、安定な提携構造の存在条件について議論する。

2　モデルおよび結果

提携構造とはプレイヤー集合 $N=\{1,\ldots,n\}$ の分割のことをいう。$\mathfrak{P}$ を N の提携構造の全体からなる集合とする。さらに Γ_S を TU ゲーム (すなわちプレイヤー集合 $S(\subset N)$ と特性関数 $v:2^S\to\mathbb{R}$ の組 (S,v) のこと) の全体とする。

提携構造つき TU ゲームとは三つ組 $(N,v,\mathcal{P})$ で、(1) $(N,v)\in\Gamma_N$、(2) $\mathcal{P}\in\mathfrak{P}$、を満たすものをいう。提携構造つき TU ゲームの全体を Δ で表す。

この準備の下で、各プレイヤーがそれぞれの提携構造について評価値を与えるという枠組み、具体的にいえばゲームの一点解 $\sigma:\Delta\to\mathbb{R}^n$ を各プレイヤー $i\in N$ が共通に提携構造の事前評価として採用しているという状況を以下のように定式化する。

定義 (σ-スキーム)

A **σ-スキームつきゲーム** もしくは単に **σ− スキーム**とは三つ組 (N,v,σ) で、(1) $(N,v)\in\Gamma_N$ 、(2) σ は提携構造つき TU ゲームの一点解、を満たすものをいう。

この設定の下で以下の二つの安定性概念を定義する。

定義 (強い安定性)

σ-スキーム (N,v,σ) のもとで、提携構造 $\mathcal{P}\in\mathfrak{P}$ が**強く安定**であるとは

$$\forall\mathcal{B}\in\mathfrak{P},\ \forall i\in N;\ \sigma_i(N,v,\mathcal{P})\geq\sigma_i(N,v,\mathcal{B})$$

が満たされることをいう。

強い安定性は、すべてのプレイヤーがほかのすべての提携構造よりもある提携構造を（共通して）好むという要請である。次に定めるコア安定はそれよりは弱い条件であり、ある提携で逸脱しても逸脱メンバーすべての利得が厳密に改善することはないという要請を課している。

ここで表記を定める。$\mathcal{P}=\{P_1,\ldots,P_k\}$ を結託構造とする. ここで、

$$\mathcal{P}^{-T}:=\{T,P_1\setminus T,\ldots,P_k\setminus T\}.$$

と定める。

定義（コア安定性）

σ-スキーム (N, v, σ) のもとで、提携構造 $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ が**コア安定**であるとは、

$$\forall i \in T;\ \sigma_i(N, v, \mathcal{P}^{-T}) > \sigma_i(N, v, \mathcal{P})$$

なる提携 $T \in 2^N$ が存在しないことをいう。

いま $\mathcal{P}(i) := \{S \in \mathcal{P} | S \ni i\}$、$\phi^i(\mathcal{P}(i), v)$ を TU ゲーム $(\mathcal{P}(i), v)$ での i の Shapley 値とし

$$\phi^i_{AD}(N, v, \mathcal{P}) := \phi^i(\mathcal{P}(i), v).$$

によって定義される Aumann-Dréze 値 $\phi_{AD} : \Delta \to \mathbb{R}^n$ を評価値とするスキームにおける分析により以下のことがわかった。まず以下の自明な結果が得られる。

命題． (N, v, σ_{AD}) を ϕ_{AD} スキームとする。全体提携構造 $\{N\}$ が強く安定であるならば、*Aumann-Dréze* 値 $(\phi^i(N, v, N))_{i \in N}$ は (N, v) のコアに属する。

命題． (N, v, σ_{AD}) を ϕ_{AD} スキームとする。*Aumann-Dréze* 値 $\phi_{AD}(N, v, \{N\}) = \phi(N, v)$ が (N, v) のコアに属しているならば、全体提携構造 $\{N\}$ はコア安定である。

系． $(N, v) \in \Gamma$ が対称ゲームであるとする。この時 ϕ_{AD} スキームのもとで、全体提携構造 $\{N\}$ が強く安定（コア安定-どちらも同じ）であるための必要十分条件は

$$\forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} :\ \frac{v(N)}{n} \geq \frac{v(S)}{|S|}.$$

である。

主たる結果は以下にまとめられる。

定理 (全体提携が強く安定になる十分条件)

凸ゲームのもとでの ϕ_{AD} スキームにおいては必ず、全体提携構造 $\{N\}$ は強く安定である。

（ϕ_{AD} スキームのもとで、$\{N\}$ が強く安定にならない優加法的ゲームは存在する。）

定理 (対称ゲームのコア安定性存在)

(N, v) を対称ゲームとするとき、ϕ_{AD} スキームのもとでコア安定な提携構造が常に存在する。

3 備考

このモデルは TU ゲームをベースにして作られているが、各提携構造に対して評価値が一定であるために、実際には NTU(正確には譲渡可能な効用はあるが、手附が存在しない) のモデルになっている。これは Lucas and Maceli の「離散的分割関数」を具体的に構成したものであるとも言える。

一般的なゲームにおけるコア安定提携構造の（自明でない）十分条件は、目下研究中である。またいくつかの経済学的応用例を通して、これらの概念が以下に使われるかを確かめられる。

本稿では一つの解を共通に提携構造の評価方法として用いるとしたが、このようなスキームの「採用」がプレイヤーの同意を経て行われるような、さらなる拡張も考えられる。