日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

提携構造付き特性関数形ゲームの S-S value の公理化

早稲田大学大学院経済学研究科　上條 良夫　KAMIJO Yoshio

1 はじめに

提携構造付き特性関数形ゲームに対して一つの利得ベクトルを対応させる代表的な解概念として Owen value(Owen[1]) が存在する．本稿では，Peleg[2] による Owen value の公理系を変更することにより，新たな解概念である S-S value の公理化を行う．2 つの解概念の公理系の相違点は，ナルプレイヤーと対称なプレイヤーの取り扱いという点のみである．

2 S-S value

(N, v, P) を提携構造付き特性関数形ゲームとし，Δ をその集合とする．また，集合 S に対して $\{S\}$ は S のメンバー全員が同じ提携に属する提携構造を表す．ϕ を $(N, v, P) \in \Delta$ に対して一つの利得ベクトルを対応させる提携構造付き特性関数形ゲームの解概念であるとする．(N, v) に対して v の $S \subseteq N$ への制限を $v|_S$ とする．

$(N, v, P) \in \Delta$ の中間ゲームと再分配ゲームを以下のように定義する．

定義 1 (中間ゲーム)　(N, v, P) の中間ゲーム (P, v_P) とは，P をプレイヤー集合とし，各提携 $S \in P$ をプレイヤーと捉え，特性関数を

$$v_P(B) = v(\bigcup_{S \in B} S), \quad \forall B \subseteq P,$$

とすることにより定義される．

定義 2 (再分配ゲーム)　任意の $S \in P$ に対して ϕ における再分配ゲーム $(S, v^{\phi}_{P,S})$ を以下のように定義する．

$$v^{\phi}_{P,S}(T) = \begin{cases} \phi_S(P, v_P, \{P\}), & T = S, \\ v(T), & T \subset S. \end{cases}$$

特性関数形ゲーム (N, v) のシャープレイ値を $Sh(N, v)$ と表すとする．また，$Sh(N, v, \{N\}) = Sh(N, v)$ とする．S-S value は以下のように定義される．

定義 3 (S-S value)　S-S value SS は以下のように定義される．

$$SS_i(N, v, P) = Sh_i(S, v^{Sh}_{P,S}), \ \forall i \in S \in P.$$

S-S value は以下のように表現することもできる．

$$SS_i(N, v, P) = Sh_i(S, v|_S) + \frac{Sh_S(P, v_P) - v(S)}{|S|}.$$

例 1　$(N, v, P) \in \Delta$．$N = \{1, 2, 3\}$, $v(\{i\}) = 0 \ \forall i \in N$, $v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = 2$, $v(\{1, 3\}) = 1$, $v(N) = 3$, $P = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ とする．このとき，

$$Ow(N, v, P) = (1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}),$$
$$SS(N, v, P) = (\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}),$$

となる．ただし，$Ow(N, v, P)$ はゲーム (N, v, P) における Owen value を表す．

3 公理

ナルプレイヤーと対称性について定義し，それに係わる代表的な公理として NP と RETP を定義する．$(N, v, P) \in \Delta$ とする．

定義 4 (ナルプレイヤー)　以下の条件が成り立つとき，$i \in N$ を (N, v, P) において**ナルプレイヤー**と呼ぶ．

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) \ , \forall S \subseteq N \setminus \{i\}.$$

定義 5 (対称性)　$i, j \in N$ が (N, v) において対称であるとは，任意の $S \subseteq N \setminus \{ij\}$ に対して，

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}),$$

が成り立つことを指し，$i \sim j\ in\ (N,v)$ と書く．

公理 1 (NP)　ϕ が NP (Null Player) を満足するとは，$i \in N$ が (N,v,P) においてナルプレイヤーであるならば，$\phi_i(N,v,P)=0$ となることをいう．

公理 2 (RETP)　以下の条件が成り立つとき，ϕ は RETP (Restricted Equal Treatment Property) を満たすという．

$$\forall i,j \in N \ \ s.t.\ \exists S: i,j \in S \in P\ ;\ i \sim j\ in\ (N,v) \longrightarrow \phi_i(N,v,P)=\phi_j(N,v,P).$$

公理 NP は提携構造とは独立に決定されていて，公理 RETP は (N,v) における対称なプレイヤーに関わる公理である．NP を提携構造に依存するような公理へと，RETP を $S \in P$ の部分ゲーム $(S,v|_S)$ において対称なプレイヤーに関する公理へと修正することにより，新たに以下の公理 CS-NP, RETP2 を定義する．

公理 3 (CS-NP)　ϕ が CS-NP (Coalition Structure - Null Player) を満足するとは，$i \in N$ が (N,v,P) でナルプレイヤーであり，$P=\{N\}$ であるならば $\phi_i(N,v,P)=0$ となることをいう．

公理 4 (RETP2)　以下の条件が成り立つとき，ϕ は RETP2 を満たすという．

$$\forall i,j \in N \ \ s.t.\ \exists S: i,j \in S \in P\ ;\ i \sim j\ in\ (S,v|_S) \longrightarrow \phi_i(N,v,P)=\phi_j(N,v,P).$$

Peleg[2] では，NP, RETP と以下の PO, ADD, IGP により Owen value の公理化を行っている．

公理 5 (PO)　以下の条件が成り立つとき，ϕ は PO (Pareto Optimality) を満たすという．

$$(\phi(N,v,P))(N)=v(N).$$

公理 6 (ADD)　任意の (N,v,P) , $(N,w,P) \in \Delta$ に対して以下の条件が成り立つとき，ϕ は ADD (Additivity) を満たすという*1．

$$\phi_i(N,v,P)+\phi_i(N,w,P)=\phi_i(N,v+w,P),\ \ \forall i \in N.$$

*1 v,w の和ゲーム $v+w$ は以下のように定義される．$(v+w)(S)=v(S)+w(S)$.

公理 7 (IGP)　以下の条件が成り立つとき，ϕ は IGP (Intermediate Game Property) を満たすという．

$$\phi_i(N,v,P)(S)=\phi_S(P,v_P,\{S\}),\ \ \forall S \in P.$$

また公理 RP を以下のように定義する．

公理 8 (RP)　以下の条件が成り立つとき，ϕ は RP(Redistribution Property) を満たすという．

$$\phi_i(N,v,P)=\phi_i(S,v^{\phi}_{P,S},\{S\}),\ \ \forall i \in S \in P.$$

4　結果

定理 1　Δ において PO , RP , CS-NP , RETP2, ADD を満たす一意の ϕ が存在し，それは S-S value である．

公理 CS-NP を以下の CS-NP2 まで強めることにより，RP を IGP まで弱めて S-S value の公理化をすることが可能である．

公理 9 (CS-NP2)　ϕ が公理 CS-NP2 を満足するとは，$i \in S \in P$ が (N,v,P) においてナルプレイヤーであり，かつ $v(S)=v(N)$ であるならば，$\phi_i(N,v,P)=0$ となることをいう．

定理 2　Δ において PO , IGP , CS-NP2 , RETP2 , ADD を満たす一意の ϕ が存在し，それは S-S value である．

定理 2 より，Owen Value と S-S value との本質的な相違点は，ナルプレイヤーと対称なプレイヤーの取り扱いの違いであることがわかる．

参考文献

[1] G.Owen(1977) Values of games with a priori unions. In Hein R,Moeschilin O(eds) Essays in Mathematical Economics and Game Theory, Springer Verlag New York 76-88.

[2] B.Peleg(1989) Introduction to the theory of cooperative games chapter8 the Shapley value. RM 88 Center for Research in Mathematical Economics and Game Theory. The Hebrew University,Jerusalem Israel.