日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

Aubin's core revisited in cooperative fuzzy games

02502510　東京工業大学　＊福田恵美子　FUKUDA Emiko
02005220　東京工業大学　石原慎一　ISHIHARA Shin-ichi
01602970　東京工業大学　武藤滋夫　MUTO Shigeo

1. はじめに

従来の特性関数形ゲームは，協力によって得られる利益が提携ごとに与えられているが，ここで，提携 $S \subseteq N$ に含まれるプレイヤーは全員完全な協力状態にあることが仮定されている．これに対し，提携への参加レベルを考慮することで曖昧な協力関係を表現できるように拡張したものがファジーゲームである．

ファジーゲームにおけるコアは Aubin (1974) によって定義され，近年も，従来の特性関数形ゲームのコアとの比較などの研究がなされている．しかし，Aubin (1974) のなかで，コアにおけるプレイヤーの受け取る支払額は参加レベルに対する比例配分という仮定が置かれているが，この仮定を正当とする理由は与えられてはいない．本稿では特性関数が正一次同次 (positive homogeneous of degree one) であれば，コアにおける支払いは参加レベルに応じて比例配分に基づくものであることを証明する．

また，応用として，線形生産ゲーム (linear production game) においてファジー提携を考慮したファジー線形生産ゲームを定義し，このゲームのコアが非空であることを示す．

2. ファジーゲームと Aubin のコア

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ をプレイヤーの集合とするとき $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in [0,1]^N$ をファジー提携という．ここで，各要素 s_i は，プレイヤー i が完全に協力する場合を $s_i = 1$，まったく協力しない場合を $s_i = 0$ としてプレイヤーの提携への参加レベルを表している．ファジーゲームは，プレイヤーの集合 N とすべてのファジー提携に対して提携値を与えた特性関数 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ の組 $\langle N, v\rangle$ で表される．また，すべての提携 $S \subseteq N$ は

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in S \\ 0 & \text{if } i \notin S \end{cases}$$

なるファジー提携 e^S として表現できることからファジーゲームは従来の特性関数形ゲームの拡張になっていることがわかる．

Aubin (1974) は配分集合およびコアを以下のように定義した．

$$I(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(e^N),\ x_i \geq v(e^i)\ \forall i \in N\}$$

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid \sum_{i \in N} s_i x_i \geq v(s)\ \forall s \in [0,1]^n\}$$

ここで，コアにおける各プレイヤーへの支払いは，プレイヤーの参加レベルについて比例配分になっていることに注意されたい．

また，Aubin は特性関数の正一次同次性を仮定している．すなわち，すべての $\gamma > 0$ と $s \in [0,1]^N$ かつ $\gamma s \in [0,1]^N$ である s に対して $v(\gamma s) = \gamma v(s)$ を満たすような特性関数 v を扱っているが，この仮定とコアにおける比例配分との関係性については言及していない．以下では，特性関数の正一次同次性からコアにおける比例分配が導かれることを示す．

3. 修正ファジーゲーム

λ を $[0,1]$ 上の Lebesgue 測度，$\mathcal{B}$ を可測集合の全体とする．プレイヤー i による部分的な参加を Lebesgue 測度をもつ $[0,1]$ の部分集合 S_i で表すと，$\lambda(S_i)$ をこのプレイヤーによる参加レベル s_i として考えられる．このように測度 λ をもちいて修正を施したゲーム $\langle N, v, ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)\rangle$ を修正ファジーゲームとよぶこととする．

つぎに，修正ファジーゲームにおける利得分配を考える．すべての $i \in N$ に対して，プレイヤー i への支払いを与える関数を $x_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ とすると，x_i は $[0,1]$ 上で Lebesgue 可積分であり，参加量 S_i に対するプレイヤー i の得る分配額は $\int_{S_i} x_i(t)dt$ となる．

以上のような修正ファジーゲームの枠組みをもってファジーゲームの配分およびコアを書き直すとつぎの

ようになる．

$$I^m(v)=\left\{x\in[0,1]^n\;\middle|\;\begin{array}{l}\sum_{i=1}^n\int_{[0,1]}x_i(t)dt=v(e^N),\\ \int_{[0,1]}x_i(t)dt\geq v(e^i)\ \forall i\in N\end{array}\right\}$$

$$C^m(v)=\left\{x\in I^m(v)\;\middle|\;\begin{array}{l}\sum_{i=1}^n\int_{S_i}x_i(t)dt\\ \geq v(\lambda(S_1),\dots,\lambda(S_n))\\ \qquad\forall(S_1,\dots,S_n)\subseteq[0,1]^N\end{array}\right\}$$

4．比例配分と正一次同次性

まず，特性関数に仮定を置かなくとも，ファジーゲームのコアについて以下の命題が得られる．

命題 1 $\langle N,v,([0,1],\mathcal{B},\lambda)\rangle$ を修正ファジーゲームとする．もしこの修正ファジーゲームのコア $C^m(v)$ が空でなければ参加レベルに関して比例分配された配分がこのコアに含まれる．

さらに，特性関数が正一次同次であるならば，コアに含まれる配分すべてが参加レベルに関する比例配分となっていることが示せる．

定理 修正ファジーゲーム $\langle N,v,([0,1],\mathcal{B},\lambda)\rangle$ において v が正同次関数であるときコアに含まれる配分は参加レベルに関して比例分配となっている．すなわち $x=(x_1,\dots,x_n)\in C^m(v)$ はすべてのプレイヤー $i\in N$ について $x_i(t)=\text{constant a.e. in }[0,1]$ となっている．

これにより，Aubin の定義したコアにおける配分が参加レベルに関する比例配分であることが，特性関数の正一次同次性から導かれていることが明らかになった．

5．ファジー線形生産ゲーム

Owen (1975) は，数種類の資源 $G_1,\dots,G_q$ から数種類の製品 $P_1,\dots,P_m$ を生産する状況を表現する線形生産ゲームを定義した．ここでは，部分的な資源投入を許容したファジー線形生産ゲームを定義する．

$A=[a_{jk}]_{j=1,k=1}^{m,\ q}(A\geq 0)$ を生産行列とする．各製品 P_j を何単位生産するかを x_j で表すと，与えられた資源 $b\in(\mathbb{R}_+^q)^\top$ のもとでは $x^\top A\leq b$ を満たす $x\in\mathbb{R}_+^m$ だけ製品を生産できる．ここで，価格ベクトルを c とすると，x だけ生産したときに得られる利益は $x^\top c$ となる．

Owen は提携 S のもっている資源によって最大限得ることのできる利益を S の提携値として以下のように与え，線形生産ゲーム $\langle N,V\rangle$ を定義した．

$$V(S)=\max\{x^\top c\,|\,x\geq 0,x^\top A\leq\sum_{i\in S}b^i\}$$

ここで，各プレイヤー i が自分のもっている資源 b^i のうち一部分 s_ib^i を投資できるとすると，$(s_1,s_2,\dots,s_n)$ をファジー提携とみなすことができ，このとき製品生産のために投入された資源は $\sum_{i\in N}s_ib^i$ となる．したがって，各ファジー提携 $s\in[0,1]^N$ に対して

$$v(s)=\max\{x^\top c\,|\,x\geq 0,x^\top A\leq\sum_{i\in N}s_ib^i\}$$

で特性関数を定義することにより，部分的投資をおこなえる上記生産計画問題に対応したファジー線形生産ゲーム $\langle N,v\rangle$ を得ることができる．

定理 $\langle N,v\rangle$ を，生産行列 A，価格ベクトル c，commodity bundles $b^1,b^2,\dots,b^n$ をもつ線形生産状況に対応したファジー線形生産ゲームとすると，このゲームの特性関数 v は正一次同次である．さらに，ファジー線形生産ゲームのコアは非空である．

6．まとめ

本稿では，ファジーゲームにおいて特性関数が正一次同次であるという仮定とコアにおける支払いが参加レベルに関しての比例配分になることとの関係性を明らかにした．

また，ファジー線形生産ゲームにおける特性関数が正一次同次性をもち，さらにこのゲームにおける Aubin のコアが非空であることを示した．

参考文献

[1] Aubin, J. P., "Coeur et Valeur des Jeux Flous a Paiement Lateraux," in *C.R. Acad. Sci. Paris* **279** A (1974) 891–894.

[2] Aubin, J. P., "Cooperative Fuzzy Games," *Mathematics of Operations Research* **6** (1981), 1–13.

[3] Owen, G., "On the core of linear production games," *Mathematical Programing* **9** (1975) 358–370.