日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

ファジィ協力ゲームにおける誘導Shapley値

02602624 大阪大学 *森谷 篤史 MORITANI Atsushi
01307844 大阪大学 谷野 哲三 TANINO Tetsuzo
大阪大学 黒木 浩二郎 KUROKI Kojiro
01308104 大阪大学 巽 啓司 TATSUMI Keiji

1 はじめに

現在までに，各提携にプレーヤーの部分的な参加を許すファジィ提携とそのファジィ提携を取り扱うことができるファジィ協力ゲームが考えられている．このファジィ協力ゲームの解として，鶴見ら [1] によりChoquet 積分型Shapley 値が提案されている．しかし，この解はファジィ協力ゲームの限定されたクラスにおいてのみ定義されているため，本稿では，一般的なファジィ協力ゲームに対し，Shapley 値の新たな定義を提案し，その性質について述べる．

2 ファジィ協力ゲーム

この節では，ファジィ協力ゲームの定義とファジィ協力ゲームの既存の解であるChoquet 積分型Shapley 値について述べる．

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ をプレーヤーの集合とし，$s\in[0,1]^n$ をファジィ提携とする．ここで，ファジィ提携 $s=(s_1,\ldots,s_n)$ の各成分 s_i は，プレーヤー i の提携 s への参加度を表す．また，ファジィ提携 s と任意の $h\in[0,1]$ に対して，$[s]_h=\{i\in N\mid s_i\geq h\}$ は s のレベル集合を，$\mathrm{supp}\ s=\{i\in N\mid s_i>0\}$ は s のサポートを表すものとする．零ベクトルを $\mathbb{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ とし，$\mathbb{R}^n$ の第 i 単位ベクトルを e^i で表す．

ここで，ファジィ協力ゲームを $\hat{v}(\mathbb{0})=0$ を満たすような実数値関数 $\hat{v}:[0,1]^n\to\mathbb{R}$ とし，すべての $\hat{v}$ の集合を $\hat{\mathcal{G}}$ とする．ただし，クリスプゲームを $v(\emptyset)=0$ を満たす実数値関数 $v:2^N\to\mathbb{R}$ とし，すべての v の集合を $\mathcal{G}$ とする．簡略化のため，以降ではファジィ協力ゲームを CFG (Cooperative Fuzzy Game) と呼ぶ．さらに，ファジィ提携 $s,t\in[0,1]^n$ の union と intersection を次のように表記する．

$$(s\vee t)_i=\max\{s_i,t_i\},\quad (s\wedge t)_i=\min\{s_i,t_i\}.$$

現在までに考えられている CFG の解として，鶴見ら [1] による Choquet 積分型 Shapley 値がある．Choquet 積分型 Shapley 値を導入する前に，同じく鶴見らによって導入された Choquet 積分を用いた CFG を示す．

定義 1 ファジィ提携 $s\in[0,1]^n$ に対して，$q(s)$ を $\mathrm{supp}\ s$ の基数とする．ここで，すべての $i\in\mathrm{supp}\ s$ に対する s_i の値を増加順に並べたものを $h_1<\cdots<h_{q(s)}$ とおき直す．クリスプゲーム $v\in\mathcal{G}$ を用いて，次式で与えられる $\hat{v}$ をChoquet 積分型CFG という．

$$\hat{v}(s)=\sum_{l=1}^{q(s)}v([s]_{h_l})(h_l-h_{l-1}),\ \forall s\in[0,1]^n.$$

この Choquet 積分型 CFG は，クリスプゲームから導出するため，CFG の限定されたクラスを提供する．ここで，クリスプゲームから導出される Choquet 積分型 CFG の集合を $\hat{\mathcal{G}}^c$ とする．

同様に，Choquet 積分の概念を用いて，鶴見らはCFG の解として Choquet 積分型 Shapley 値を考えた．ただし，CFG は $\hat{\mathcal{G}}^c$ のクラスのみを扱うものとする．

定義 2 $s\in[0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v}\in\hat{\mathcal{G}}^c$ をクリスプゲーム $v\in\mathcal{G}$ に対応する Choquet 積分型 CFG とする．このとき，$\hat{v}$ における s に対する Choquet 積分型 Shapley 値 $f(s,\hat{v})\in\mathbb{R}^n$ は次式で与えられる．

$$f_i(s,\hat{v})=\sum_{l=1}^{q(s)}\phi_i'([s]_{h_l},v)(h_l-h_{l-1}),\ \forall i\in N.$$

ただし，$\phi_i'([s]_h,v)$ は次で与えられる．

$$\phi_i'([s]_h,v)=\begin{cases}\sum_{T\subseteq[s]_{h_l}}\beta(T;[s]_{h_l}) & \\ \quad [v(T)-v(T\setminus\{i\})], & i\in[s]_{h_l}.\\ 0, & i\notin[s]_{h_l}.\end{cases}$$

ここで，$\beta(T;[s]_{h_l})=\dfrac{(|T|-1)!(|[s]_{h_l}|-|T|)!}{|[s]_{h_l}|!}$ である．

3 誘導Shapley値

この節では，一般的な CFG に対する Shapley 値の新たな定義を提案し，その性質について述べる．

ファジィ提携 $s\in[0,1]^n$ と $T\subseteq N$ に対して，次のようなファジィ提携 $s_{|T}\in[0,1]^n$ を導入する．

$$(s_{|T})_i=\begin{cases}s_i, & \text{if } i\in T,\\ 0, & \text{if } i\notin T.\end{cases}$$

ファジィ提携とCFGから誘導されるクリスプゲームを次のように定義する．

定義 3 ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ と CFG $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ が与えられたとき，s と $\hat{v}$ から誘導されるクリスプゲーム $v^s : 2^{\mathrm{supp}\ s} \to \mathbf{R}$ は次式で定義される．

$$v^s(T) = \hat{v}(s_{|T}),\ \forall T \subseteq \mathrm{supp}\ s.$$

ファジィ提携とCFGから誘導されるクリスプゲームを誘導ゲームと呼ぶ．

ここで，誘導ゲームと通常の意味での Shapley 値を用いて，ファジィ協力ゲームの Shapley 値とし，これを誘導 Shapley 値と呼ぶ．

定義 4 $s \in [0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ を CFG とする．$\hat{v}$ における s に対する誘導 Shapley 値 $g(s,\hat{v})$ を次のように定義する．

$$g_i(s,\hat{v}) = \begin{cases} \phi_i(\mathrm{supp}\ s, v^s), & \text{if } i \in \mathrm{supp}\ s, \\ 0, & \text{if } i \notin \mathrm{supp}\ s. \end{cases}$$

ただし，ϕ はクリスプゲームの Shapley 値であり，$\phi_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$ である．

これ以降，$\hat{v}$ における s に対する誘導 Shapley 値を単に誘導 Shapley 値という。

ここで，誘導 Shapley 値の公理を述べる前にいくつかの概念を導入する．プレーヤー i のファジィ提携 s への参加度を 0 にしたファジィ提携 s^{-i} を次のように定義する．

$$(s^{-i})_j = \begin{cases} s_j, & \text{if } j \neq i, \\ 0, & \text{if } j = i. \end{cases}$$

次の関係を満たすプレーヤー $i \in \mathrm{supp}\ s$ を $\hat{v}$ における s-ダミープレーヤーという．

$$\hat{v}(s_{|T} + s_i e^i) = \hat{v}(s_{|T}) + \hat{v}(s_i e^i),\ \forall T \subseteq \mathrm{supp}\ s^{-i}.$$

ファジィ提携 s に対して，プレーヤー $i,j \in \mathrm{supp}\ s$ の要素を入れ替えたファジィ提携 s^{ij} を次のように定義する．

$$(s^{ij})_k = \begin{cases} s_j, & \text{if } k = i, \\ s_i, & \text{if } k = j, \\ s_k, & \text{if } k \neq i,j. \end{cases}$$

$\hat{v}(s) = \hat{v}(s^{ij})$ を満たす $i,j \in \mathrm{supp}\ s$ を $\hat{v}$ における s-対称なプレーヤーという．

誘導 Shapley 値の公理として，以下の5つの公理を考える．以下での $\xi : [0,1]^n \times \hat{\mathcal{G}} \to \mathbf{R}^n$ は CFG の一般的な解である．

公理 1 s に関する全体合理性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ と CFG $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，次式が成り立つ．

$$\begin{cases} \sum_{i \in \mathrm{supp}\ s} \xi_i(s,\hat{v}) = \hat{v}(s), \\ \xi_i(s,\hat{v}) = 0, \quad \text{if } i \notin \mathrm{supp}\ s. \end{cases}$$

公理 2 加法性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ と CFG $\hat{v},\hat{w} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，次式が成り立つ．

$$\xi(s,\hat{v}+\hat{w}) = \xi(s,\hat{v}) + \xi(s,\hat{w}).$$

公理 3 s-ダミー性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ と CFG $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，プレーヤー $i \in \mathrm{supp}\ s$ が $\hat{v}$ において s-ダミープレーヤーであるなら，次式が成り立つ．

$$\xi_i(s,\hat{v}) = \hat{v}(s_i e^i).$$

公理 4 s-対称性

ファジィ提携 $s \in [0,1]^n$ と CFG $\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}$ に対して，プレーヤー $i,j \in \mathrm{supp}\ s$ が $\hat{v}$ において s-対称なプレーヤーであるなら，次式が成り立つ．

$$\xi_i(s,\hat{v}) = \xi_j(s,\hat{v}).$$

命題 1 誘導 Shapley 値 $g(s,\hat{v})$ は，s に関する全体合理性，加法性，s-ダミー性，s-対称性 (公理 1-4) を満たす．

CFG のクラスを $\hat{\mathcal{G}}^c$ に限定したとき，次の関係が成り立つ．

定理 1 $s \in [0,1]^n$ をファジィ提携，$\hat{v} \in \hat{\mathcal{G}}^c$ を CFG とする．このとき，Choquet 積分型 Shapley 値 f と誘導 Shapley 値 g は一致する．つまり次式が成り立つ．

$$f_i(s,\hat{v}) = g_i(s,\hat{v}),\ \forall i \in N.$$

4 まとめ

本稿では，CFG の新たな解として，誘導 Shapley 値を提案し，公理的特徴付けを行った．そして，限定されたクラスにおいて，誘導 Shapley 値と Choquet 積分型 Shapley 値が一致することを示した．

参考文献

[1] M. Tsurumi, T. Tanino and M. Inuiguchi: The Shapley function on a class of cooperative fuzzy games. *European Journal of Operational Research*, **129** (2001) 596-618.