日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

リスク回避度と最適損失削減努力

大阪大学 尾崎祐介 OSAKI Yusuke

1 論文の目的

リスクの経済学において, リスク回避的な主体が不確実な損失を削減する努力として, 損失の程度を減少させる自己保険 (self-insurance) の努力と損失の確率を減少させる自己防衛 (self-protection) の努力が分析されてきた. 先行研究 [1] では状態が 2 個の単純な不確実性の下で, Arrow-Pratt の絶対的リスク回避度 (以後, リスク回避度) の増加に対して, 自己保険の努力は単調に増加するが, 自己防衛の努力は必ずしも単調性が成立しないことが示されてきた. 最近の文献 [2] で, 損失の程度と確率を同時に減少させる自己防衛付き保険 (self-insurance-cum-protection) の努力が分析された. 本稿では一般的な不確実性の下で, 上記の最適損失削減努力がリスク回避度の増加に対して単調となることを保証する条件を導出する.

2 最適損失削減努力

2.1 自己保険

期末に確実な富 W と不確実な損失に直面している主体を考える. 不確実性は状態空間 $S=[a,b]$ で表現され, 状態の確率分布は S 上の分布関数 $F(s)$ で与えられる. 損失は状態と自己保険の努力で与えられる. 状態が $s\in S$, 努力 $e\in[0,\overline{e}]$ の時の損失は $L(s,e)$ となる. 一般性を失うことなく, 努力を行わない時 $(e=0)$ の損失は状態の増加関数とする: $L_s(s,0)\geq 0$. ここで, 下付きの文字は偏微分を表現する. 任意の努力 $e\in(0,\overline{e}]$ に対しても, 損失は状態に対する増加関数であることを仮定する: $L_s(s,e)\geq 0,\ \forall e\in(0,\overline{e}]$. 損失は努力の減少関数とする: $L_e(s,e)\leq 0$. 努力 e の時の費用は $c(e)$ とする. 費用は努力の増加関数とする: $c'(e)\geq 0$. 以上の設定の下, von Neumann-Morgenstern 効用関数 (以後, vNM 関数) u $(u'>0,u''<0)$ を持つ主体は期末の富から得る期待効用を最大とするよう期首に努力を決定する:

$$\mathbb{E}[u(W-c(e)-\tilde{L}(e))]\to\max(e). \tag{1}$$

最適性の一階条件は以下で与えられる:

$$\begin{aligned}&-\int_a^b(c'(e^*)+L_e(s,e^*))u_e(s,e^*)f(s)ds\\ =&\int_a^b X(s,e^*)u_e(s,e^*)f(s)ds=0,\end{aligned} \tag{2}$$

ただし, $u(s,e^*)=u(W-c(e^*)-L(s,e^*))$ とした. 主体がリスク回避的であることを仮定していたので, (2) 式は, 最適努力の必要十分条件となる.

2.2 自己防衛

状態の確率分布は自己防衛の努力の関数となる: $F(s,e)$. 確率分布は, 努力の増加に対して何らかの確率順序の規則に従って変化する. 主体の効用最大化問題は以下となり:

$$\mathbb{E}_e[u(W-c(e)-\tilde{L})]\to\max(e), \tag{3}$$

最適な努力は以下で特徴付けられる:

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left(L'(s)\frac{F_e(s,e^*)}{f(s,e^*)}-c'(e^*)\right)u_e(s,e^*)f(s,e^*)\\ =&\int_a^b X(s,e^*)u_e(s,e^*)f(s,e^*)ds=0.\end{aligned} \tag{4}$$

2.3 自己防衛付き保険

自己防衛付き保険の努力とは, 損失の程度 (自己保険の努力) と確率 (自己防衛の努力) の両方を減少させる努力である. 今までの議論により, 主体の効用最大化問題は以下となり:

$$\mathbb{E}_e[u(W-c(e)-\tilde{L}(e))]\to\max(e), \tag{5}$$

最適な努力は以下で特徴付けられる:

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left(\left(L_s(s,e^*)\frac{F_e(s,e^*)}{f(s,e^*)}-L_e(s,e^*)\right)\right.\\ &\qquad\left.-c'(e^*)\right)u_e(s,e^*)f(s,e^*)\\ =&\int_a^b X(s,e^*)u_e(s,e^*)f(s,e^*)ds=0.\end{aligned} \tag{6}$$

3 比較静学の方法

今までの分析より, 最適損失削減努力は以下で与えられる:

$$\int_a^b X(s,e^*)u_e(s,e^*)f(s,e^*) = 0. \tag{7}$$

今, $X(s,e^*)$ が状態に対して単調増加と仮定する: $X_s(s,e^*) \geq 0$. $X(a,e^*) < 0$ なので, $X(s,e^*)$ は負から正に 1 回符号変換する. $X(s,e^*) = 0$ となる状態を $\hat{s}$ とすると, (7) 式より $X(\hat{s},e^*) = \int_a^{\hat{s}} X(s,e^*)u_s(s,e^*)f(s,e^*)ds + \int_{\hat{s}}^b X(s,e^*)u_s(s,e^*)f(s,e^*)ds$ となる. 上の式と, よりリスク回避的な vNM 関数が増加凹変換で表現できることに注意をする. すると, vNM 関数 u よりもリスク回避的な v の限界効用を, u の最適損失削減努力 e^* で評価すると以下を得る:

$$\begin{aligned}&\int_a^{\hat{s}} X(s,e^*)(g_s(s,e^*) - g_s(\hat{s},e^*))\\ &\quad u_s(s,e^*)f(s,e^*)ds\\ +&\int_{\hat{s}}^b X(s,e^*)(g_s(s,e^*) - g_s(\hat{s},e^*))\\ &\quad u_s(s,e^*)f(s,e^*)ds \geq 0,\end{aligned} \tag{8}$$

ここで, g は増加凹関数である. すなわち, $X(s,e^*)$ が状態の増加関数であれば, 最適損失削減努力はリスク回避度の増加に対して単調増加する.

4 結果

以下では, リスク回避度に対して単調性を保障する努力の性質を導出する. 証明については省略する.

4.1 自己保険

命題 4.1. 損失 $L(s,e)$ の状態 s と努力 e に対する交差微分が非正と仮定する: $L_{se} = L_{es} \leq 0$. 上の仮定の下では, 最適な自己保険の努力はリスク回避度の増加に対して単調増加する. □

単調性を保障する条件は, 任意の $s \leq s'$ に対して $0 \geq L_e(s,e) \geq L_e(s,e)$ である. その条件は, 損失が大きいほど努力による損失の程度の削減効果が大きくなるという自然な条件である.

4.2 自己防衛

命題 4.2. 分布関数について以下を仮定する:

- 分布関数は凹関数,
- 努力の増加に対して, 単調確率比支配の意味で分布関数が変化.

上の仮定の下で, 最適な自己防衛の努力はリスク回避度の増加に対して単調増加する. □

単調確率比支配の順序は逆ハザード比支配の順序とも呼ばれる. 単調確率比支配の順序は, 単調尤度比より弱い順序で第 1 級確率支配より強い順序である. 状態が 2 つの単純な不確実性の下で, 選好に一定の条件を課すことで損失のが起こる状態の確率が 1/2 以下の場合にリスク回避度の増加に対して最適な自己防衛の努力が単調増加することが示されている. 分布関数が凹関数という条件は, 上記の条件の一般化である.

4.3 自己防衛付き保険

命題 4.3. 損失と分布関数について以下を仮定する:

- 損失の状態と努力に対する交差微分が非正,
- 分布関数は凹関数,
- 努力の増加に対して, 単調確率比支配の意味で分布関数が変化.

上の仮定の下で, 最適な自己防衛付き保険の努力はリスク回避度の増加に対して単調増加する. □

References

[1] Dionne, G. and Eeckhoudt, L. (1985), "Self–insurance, Self–protection and Increased Risk–Aversion," *Economics Letters*, **17**, pp. 39–42.

[2] Lee, K. (1998), "Risk Aversion and Self–Insurance–cum–Protection," *Journal of Risk and Uncertainty*, **17**, pp. 139–150.