日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

永久ゲームオプションの価格式について

02203113 南山大学 *鈴木 淳生 SUZUKI Atsuo
01202653 南山大学 澤木 勝茂 SAWAKI Katsushige

1 はじめに

アメリカンプットオプションの価格式についてはこれまで様々な研究がなされてきたが閉じた形の解析解は存在しない．しかしながら，Merton[3] は満期が無限の場合，すなわち，永久アメリカンプットの価格を閉じた形の解析解として導出している．

そこで本研究では，Kifer[2] により考察されたゲームオプションの満期が無限の場合の価格式を提示する．また，永久ゲームプットオプションが永久アメリカンオプションに退化する条件を求める．

2 ゲームオプション

本研究で考える市場は連続的に取引される 2 種類の資産で構成されているものとする．これらの資産のうち 1 つは無危険資産 (債券) であり，時刻 t における価格を B_t, 無危険利子率を r とすると B_t は

$$dB_t = rB_t dt,\ B_0 > 0,\ r \geq 0 \tag{1}$$

をみたす．もう 1 つの資産は危険資産 (株式) であり，時刻 t における価格を X_t とすると X_t は確率微分方程式

$$dX_t = \mu X_t dt + \kappa X_t dW_t \tag{2}$$

をみたすものとする．ここで μ, κ は定数, W_t は完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上で定義される標準 Brown 運動とする．

同値マルチンゲール測度 $\tilde{P}$ を P に対して

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\kappa}\right)^2 t - \left(\frac{\mu-r}{\kappa}\right) W_t\right\}$$

と定義する．

$$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu-r}{\kappa} t \tag{3}$$

とおけば，$\tilde{P}$ の下で $\tilde{W}_t$ は標準 Brown 運動となる．(3) を (2) に代入すると，

$$dX_t = rX_t dt + \kappa X_t d\tilde{W}_t \tag{4}$$

となる．

ゲームオプションは任意の時刻において売り手は契約のキャンセルを，買い手は権利を行使することができる条件付き請求権である．売り手が停止時刻 $\sigma \in [0,T]$ でキャンセルし，買い手は停止時刻 $\tau \in [0,T]$ で権利行使するならば売り手は買い手に停止時刻 $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma,\tau)$ で

$$R(\sigma,\tau) = f_1(X_\tau)1_{\{\tau\leq\sigma\}} + f_2(X_\sigma)1_{\{\sigma<\tau\}} \tag{5}$$

支払う．

Z_t^π を時刻 t での資産とする．$\mathcal{T}_{t,T}$ を区間 $[t,T]$ に値をとる停止時刻の集合とする．すべての $t \in [0,T]$ に対して確率 1 で $Z_{\sigma\wedge t}^\pi \geq R(\sigma,t)$ となるような停止時刻 $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$ と自己充足的なポートフォリオ π の組 (σ,π) を満期 T のゲームオプションのヘッジという．このゲームオプションの価格は

$$V^*(0) = \inf\{V \geq 0 | \exists(\sigma,\pi) \text{ with } Z_0^\pi = V\}$$

で定義される．

定理 1 ゲームオプションの価格 $V^*(t)$ は

$$\begin{aligned} V^*(t) &= \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

であり，最適な停止時刻は以下で定義される．

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \inf\{t \in [0,T) | V^*(t) = e^{-rt}f_1(X_t)\} \wedge T \\ \hat{\sigma} &= \inf\{t \in [0,T) | V^*(t) = e^{-rt}f_2(X_t)\} \wedge T. \end{aligned}$$

ゲームコールオプションについてはアメリカンコールオプションと同様に次のことがいえる．

定理 2 資産価格が (4) にしたがうとき，ゲームコールオプションの買い手は満期まで権利を行使しないことが最適である．

3 永久ゲームオプション

永久ゲームオプションの価格式を以下で定義する．ただし，時刻 0 で x を出発する確率過程の期待値を $E^x[\cdot]$ と書く．

$$\begin{aligned} V_\infty(x) &= \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \tilde{E}^x[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}R(\sigma,\tau)] \\ &= \operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{0,\infty}} \tilde{E}^x[e^{-r(\sigma\wedge\tau)}(f_1(X_\tau)1_{\{\tau\leq\sigma\}} \\ &\qquad + f_2(X_\sigma)1_{\{\sigma<\tau\}})], \end{aligned} \tag{6}$$

ここで $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ はペイオフ関数であり，コールの場合は

$$f_1(x) = (x-K)^+,\quad f_2(x) = (x-K)^+ + \delta,$$

プットの場合は

$$f_1(x) = (K-x)^+,\quad f_2(x) = (K-x)^+ + \delta$$

である．ただし，K は権利行使価格, δ はペナルティ (手数料) である．以下ではコールのとき $V_\infty(x) = V_\infty^{gc}(x)$, プットのとき $V_\infty(x) = V_\infty^{gp}(x)$ と書く．

(6) において sup, inf を実現する停止時刻を τ_a, σ_b, 最適行使境界は時間に依存しないのでそのときの株価を $X_{\tau_a} = a, X_{\sigma_b} = b$ とすると (6) は次のように書きかえることができる.

$$\begin{aligned} V_\infty(x) &= \tilde{E}^x[e^{-r\tau_a} f_1(a) 1_{\{\tau_a \le \sigma_b\}} + e^{-r\sigma_b} f_2(b) 1_{\{\sigma_b < \tau_a\}}] \\ &= f_1(a) \tilde{E}^x[e^{-r\tau_a} 1_{\{\tau_a \le \sigma_b\}}] \\ &\qquad + f_2(b) \tilde{E}^x[e^{-r\sigma_b} 1_{\{\sigma_b < \tau_a\}}]. \end{aligned}$$

定理 3 永久ゲームオプションの価格式は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} V_\infty(x) =& f_1(a) \frac{\frac{x}{b} - \left(\frac{b}{x}\right)^\gamma}{\frac{a}{b} - \left(\frac{b}{a}\right)^\gamma} \\ &+ \quad f_2(b) \frac{\frac{x}{a} - \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma}{\frac{b}{a} - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma} \end{aligned} \tag{7}$$

が成り立つ. ただし, a, b はそれぞれ買い手と売り手の最適行使境界であり, プットでは $0 < a < b < \infty$, コールでは $0 < b < a < \infty$ をみたす. また, $\gamma = 2r/\kappa^2$ である.

この定理の証明には以下の補題を用いる.

補題 4 λ, y, ρ は $0 < \lambda < y < \rho$ をみたす任意の実数とする. 時刻 0 で y を出発する確率過程の期待値を $E^y[\cdot]$ と書く. このとき以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} &E^y[e^{-r\tau_a} 1_{\{\tau_a \le \sigma_b\}}] \\ &\qquad = \frac{\sinh(y-\lambda)\sqrt{\mu^2+2r}}{\sinh(\rho-\lambda)\sqrt{\mu^2+2r}} e^{\mu(\rho-y)} \\ &E^y[e^{-r\sigma_b} 1_{\{\sigma_b < \tau_a\}}] \\ &\qquad = \frac{\sinh(\rho-y)\sqrt{\mu^2+2r}}{\sinh(\rho-\lambda)\sqrt{\mu^2+2r}} e^{\mu(y-\lambda)}. \end{aligned}$$

永久ゲームプットオプションの価格式 $V_\infty^{gp}(x)$ は次の性質をもつ.

1. $V_\infty^{gp}(x) \le V_\infty^{p}(x), \quad \forall x$
2. $(K-x)^+ \le V_\infty^{gp}(x) \le (K-x)^+ + \delta, \quad \forall x$

前者は, 売り手が契約をキャンセルする権利をもつのでアメリカンオプションより価格が低くなることを表している. 後者は裁定機会が存在しないことから成り立つ関係式である.

永久ゲームプットオプションにおいて売り手が契約をキャンセルしない場合 $(b \to \infty)$ を考える. (7) 式より,

$$\begin{aligned} V_\infty^{gp}(x) \;=\; & (K-a)^+ \frac{\frac{x}{b^{\gamma+1}} - \left(\frac{1}{x}\right)^\gamma}{\frac{a}{b^{\gamma+1}} - \left(\frac{1}{a}\right)^\gamma} \\ &+ \{(K-b)^+ + \delta\} \frac{\frac{x}{a} - \left(\frac{a}{x}\right)^\gamma}{b\left(\frac{1}{a} - \frac{a^\gamma}{b^{\gamma+1}}\right)} \\ &\longrightarrow (K-a)\left(\frac{a}{x}\right)^\gamma \end{aligned}$$

となり, 永久アメリカンプットオプションの価格と一致する.

次に永久ゲームコールオプションで買い手が権利を行使しない場合 $(a \to \infty)$ は

$$\begin{aligned} V_\infty^{gc}(x) =& \frac{(a-K)^+}{a} \frac{\frac{x}{b} - \left(\frac{b}{x}\right)^\gamma}{\frac{1}{b} - \frac{b^\gamma}{a^{\gamma+1}}} \\ &+ \{(b-K)^+ + \delta\} \frac{\frac{x}{a^{\gamma+1}} - \frac{1}{x^\gamma}}{\frac{b}{a^{\gamma+1}} - \frac{1}{b^\gamma}} \\ &\to b\left\{\frac{x}{b} - \left(\frac{b}{x}\right)^\gamma\right\} + \{(b-K)^+ + \delta\}\left(\frac{b}{x}\right)^\gamma \end{aligned}$$

となる.

δ は売り手が契約をキャンセルしたときのペナルティであるから, この値が十分大きければ売り手はキャンセルをしない. 具体的には以下の場合である.

命題 5 永久アメリカンプットオプションの価格を $V_\infty^p(x)$ とする. $\delta > \frac{K\gamma^\gamma}{(1+\gamma)^{\gamma+1}}$ ならば,

$$V_\infty^{gp}(x) = V_\infty^p(x),$$

すなわち, 永久ゲームプットオプションは永久アメリカンプットオプションに退化する. したがって, 売り手は権利行使をしないことが最適である.

4 おわりに

本研究では満期が無限で, オプションの買い手が権利行使を, 売り手が契約のキャンセルを任意の時刻でできる永久ゲームオプションの価格式を提示した. また, 買い手と売り手のどちらか一方が停止時刻を選択しないことが最適である場合について価格式を求めた. さらに永久ゲームオプションが永久アメリカンオプションに退化する δ に関する条件を求めた.

参考文献

[1] Karatzas, I. and Shreve, S.E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, (1988).

[2] Kifer, Y., "Game options", *Finance and Stochastics*, **4**, 443-463, (2000).

[3] Merton, R.C., "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183, (1973).