日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

一対比較行列の感度分析

01307154　大阪大学　*田地　宏一　TAJI Kouichi
大阪大学　松本　圭司　MATSUMOTO Keiji

1　はじめに

AHP において，一対比較の整合性は，次に示す整合度指数（CI 値）によって判定される．

$$\mathrm{CI}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{1}$$

ここで，n は代替案の数，$\lambda_{\max}$ は一対比較行列 $A=(a_{ij})$ の最大固有値を表す．通常，$\mathrm{CI}\le 0.1$ または $\mathrm{CI}\le 0.15$ であれば一対比較は整合していると見なされる．AHP を実際に適用する場合には，一対比較の見直しや，やり直しがたびたび行われる．その際，固有値，固有ベクトルを計算する前に，CI 値を指定した値以下に保つような，一対比較値の範囲を推定したり，CI 値が大きい場合にそれを最も改善するような一対比較を指摘することは，非常に有効と考えられる．これらは，重要度ベクトルを幾何平均によって求める場合には，[1, 2] で提案されている．本研究では，重要度ベクトルを固有ベクトル法で求める場合に，固有値，固有ベクトルを計算することなく，整合性を保つ区間の推定や，一対比較の改善を行う方法について考える．

2　準備

一対比較行列 $A=(a_{ij})$ の第 i 行を，行ベクトル a_i で表すものとする．ペロン・フロベニウスの定理 [3, Theorem 3] により，任意の正ベクトル w（要素がすべて正であるベクトル）に対し，

$$\min\left\{\frac{a_1w}{w_1},\cdots,\frac{a_nw}{w_n}\right\} \le \lambda_{\max} \le \max\left\{\frac{a_1w}{w_1},\cdots,\frac{a_nw}{w_n}\right\} \tag{2}$$

が成立する．とくに，行列 A の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトル w^* に対しては，

$$\min\left\{\frac{a_1w^*}{w_1^*},\cdots,\frac{a_nw^*}{w_n^*}\right\} = \lambda_{\max} = \max\left\{\frac{a_1w^*}{w_1^*},\cdots,\frac{a_nw^*}{w_n^*}\right\}$$

となる．式 (1)，(2) より，$\overline{\mathrm{CI}}$ が与えられたとき，適当な正ベクトル $w>0$ が存在し，

$$\max\left\{\frac{a_1w}{w_1},\cdots,\frac{a_nw}{w_n}\right\} \le n+\overline{\mathrm{CI}}\times(n-1) \tag{3}$$

を満たせば，CI 値は $\overline{\mathrm{CI}}$ 以下であることが保証される．

3　整合度を保つ区間の推定

本節では，与えられた整合度指数を超えない一対比較値の区間を推定する方法を提案する．一対比較行列の逆数性を保存しつつ，行列 A の (i,j) 要素を δ $(\delta>0)$ 倍するものとする．したがって，a_{ji} は $1/\delta$ 倍される．また，(i,j) および (j,i) 以外の要素は固定するものとする．この条件の下で，式 (3) を満たす δ の区間を求めれば，整合度を保つ一対比較値の区間推定ができる．式 (3) には未定変数 w が含まれているが，精度良く推定するためには，w は固有ベクトルにできる限り近いものを選べばよいことがわかる．そのため，ここでは w として幾何平均を用いることとした．

もともとの一対比較行列 $A=(a_{ij})$ から得られる幾何平均ベクトルを v とすると，v の各要素は $v_i=\left(\prod_{j=1}^n a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}$ となる．また，a_{ij} を δa_{ij} で置き換えたときの幾何平均を $v(\delta_{ij})$ と書くことにすると，一対比較行列の逆数性により，$v_i(\delta_{ij})=\delta^{\frac{1}{n}}v_i$, $v_j(\delta_{ij})=\delta^{-\frac{1}{n}}v_j$, $v_k(\delta_{ij})=v_k$ $(k\ne i,j)$ である．さらに，式 (3) の w に $v(\delta_{ij})$ を代入したときの，左辺の max の中の第 k 要素を $f_k(\delta_{ij})$ と記すことにすれば，簡単な計算により，

$$\begin{aligned}
f_i(\delta_{ij}) &= \frac{a_{ij}v_j}{v_i}\delta^{1-\frac{2}{n}}+\frac{\sum_{l\ne i,j}a_{il}v_l}{v_i}\delta^{-\frac{1}{n}}+1\\
f_j(\delta_{ij}) &= \frac{a_{ji}v_i}{v_j}\delta^{-1+\frac{2}{n}}+\frac{\sum_{l\ne i,j}a_{jl}v_l}{v_j}\delta^{\frac{1}{n}}+1 \qquad (4)\\
f_k(\delta_{ij}) &= \frac{a_{ki}v_i}{v_k}\delta^{\frac{1}{n}}+\frac{a_{kj}v_j}{v_k}\delta^{-\frac{1}{n}}+\frac{\sum_{l\ne i,j}a_{kl}v_l}{v_k}\\
&\quad (k\ne i,j)
\end{aligned}$$

が得られる．したがって，式 (3) より

$$f(\delta_{ij})=\max_{1\le k\le n}f_k(\delta_{ij})\le n+\overline{\mathrm{CI}}\times(n-1) \tag{5}$$

をみたす δ_{ij} の区間を求めれば，$\overline{\mathrm{CI}}$ 以下であるような a_{ij} の区間を推定できる．各 f_k は単峰性関数であるので，そのような区間は二分法などにより簡単に求められる．

4 整合度の改善

本節では，一対比較の整合性が悪い場合に，その要因となる一対比較を発見し，改善する方法について考える．一対比較行列 A の (i,j) 要素 a_{ij} を，δa_{ij} で置き換えたときの最大固有値を $\lambda_{\max}(\delta_{ij})$ と記す．すると，関数 f の作り方，および式 (2) により

$$\lambda_{\max}(\delta_{ij}) \leq f(\delta_{ij})$$

が得られる．$n=3$ の場合には，幾何平均が最大固有値に対する固有ベクトルとなるため，上式は等号で成立するが，$n \geq 4$ の場合には一般には等号は成立せず，$f(\delta_{ij})$ は $\lambda_{\max}(\delta_{ij})$ の上界値としかならない．しかしながら，上界値を下げることで，$\lambda_{\max}(\delta_{ij})$ を小さくすることは期待できる．とくに，ある i,j において $f(\delta_{ij})$ を最小化したとき，現在の最大固有値よりも小さい値が得られれば，式 (1) より CI 値も改善できることがわかる．本研究では，逆数性を保つことを仮定しているので，一対比較値を変化させる候補は，代替案数を n とするとき $n(n-1)/2$ 個ある．これらすべてに対し，$f(\delta_{ij})$ を最小化し，最も小さい値をとったときの要素 a_{ij} を一対比較のエラーの候補とし，そのときの最適解 δ^*_{ij} に対応する値，$\delta^*_{ij}a_{ij}$ を一対比較の改善の一つの目安として提示することを提案する．f_k の単峰性により，f もまた単峰関数となるため，この最小化は黄金分割法などにより容易に行える．なお，$f(\delta_{ij})$ を最小化したとき，現在の値，すなわち，$f(1)$ よりも小さいものがなければ，改善の可能性は少ないと見なせる．

5 数値実験

提案した方法を用いて，数値実験を行った．その結果を紹介する．まずはじめに，以下の例（CI = 0.04）に対して，3 節で示した方法を用いて CI $\leq$ 0.1 となる区間の推定を行った．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

その結果を，以下に示す．

$$\begin{aligned} a_{12} &= [0.663, 2.883] = a_{23} = a_{34} \\ a_{13} &= [1.356, 4.030] = a_{24} \\ a_{14} &= [1.746, 7.313] \end{aligned} \tag{6}$$

この例では $n=4>3$ なので，$f(\delta_{ij})$ は最大固有値の上界にしかならない．そのため，上で得られた境界においても CI 値は 0.1 より小さくなり，最も大きい場合で 0.068 であった．比較のため，同じ例に対し，整数値およびその逆数を代入し，実際に固有値を計算し CI $\leq$ 0.1 を満たす範囲を求めた．その結果を下に示す．

$$\begin{aligned} a_{12} &= \left[\frac{1}{3}, 3\right] = a_{23} = a_{34} \\ a_{13} &= [1, 6] = a_{24} \\ a_{14} &= [2, 15] \end{aligned}$$

提案した方法によって得られた区間 (6) は，ほとんどこの区間に含まれていることがわかる．

次に，上の行列の (2,3) 要素を 2 から 5 に変えた行列を考える．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 5 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

この行列の最大固有値は，$\lambda_{\max} = 4.402$ であり，CI 値は CI = 0.134 である．この行列に対し，4 節で提案した方法を用いて，整合度の改善を行った．その結果，$f(\delta_{ij})$ は $(i,j)=(2,3)$ のときに最も小さくすることができた．また，そのときの最適解は $\delta^*_{23} = 0.2$ となり，それを用いて次の行列を得た．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

この行列の CI 値は，CI = 0.02 であり，整合度が大きく改善されていることがわかる．

参考文献

[1] J. Aguarón, M.T. Escobar and J.M. Moreno-Jiménez, "Consistency stabolity intervals for judgement in AHP decision support systems," *European Journal of Operational Research* 145 (2003) 382-393.

[2] S. Lipovetsky and W.M. Conklin, "Robust estimation of priorities in the AHP," *European Journal of Operational Research* 137 (2002) 100-122.

[3] K. Sekitani and N. Yamaki, "A logical interpritation for the eigenvalue method in AHP," *Jouranl of the Operations Research Society of Japan* 42 (1999) 219-232.