日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

AHPにおける誤差配置とウェイト推定法

01104400　法政大学　加藤 豊　KATO Yutaka
01007500　慶應義塾大学　＊小澤 正典　OZAWA Masanori

1. 一対比較行列と誤差

AHPにおいて，一対比較行列に含まれる誤差が全ての要素について一様にある分布に従っていると考えて，最良なウェイトを推定するのが，幾何平均法であり一般平均法でもある．しかしながら，誤差がどの比較についても一様に同じ分布から生じるという仮定は，実際にはその評価項目についての比較がいつも同じ程度の正確さでなされているという仮定が必要である．一方，固有ベクトルを利用する方法は，一対比較値には誤差が含まれないものとして考え，その一対比較行列にできるだけ合うようにそのウェイトを推定するものと考えてもよい．なお，誤差を含まないという考え方であるとそのモデルの妥当性を考慮せざる得ない状況も生じる．

そこで，一様に同じ誤差分布に従う仮定や，誤差を生じないという仮定ではなく，誤差がすべての要素でなくある特定の要素のみにあると仮定することにする．

しかし，n 次の一対比較行列 (a_{ij}) の幾何平均法や一般平均法における推定ウェイトは，

$$\hat{w}_i = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{-r}\right)^{-1/r}, \quad r \text{ はパラメータ}$$

であり，一対比較行列の行について各要素の関数和をとるので，ここで議論するような，誤差の行列への配置については各行に誤差がどの程度あるかによって定まることになる．一方，固有ベクトル法は，各要素にある誤差が推定ウェイトすべてに影響を与えることになる．そこで，固有ベクトル法における推定ウェイトへの影響を考える．その際，一対比較行列の転置の固有ベクトルを使用した左固有ベクトル法 [1] との違いも検討する．

2. 誤差パターン

つぎのような誤差を含んだ一対比較行列 (A) が与えられたものとする．このとき，固有ベクトル法の推定ウェイト $\hat{w}$ と真のウェイト w との差と，左固有ベクトル法による推定ウェイト $\tilde{w}$ との差は，

$$\frac{\|\hat{w}-w\|_2}{\|\tilde{w}-w\|_2} = \frac{3\mu+n^2}{n\mu+3n}$$

$$(\mu = \lambda_{\max} - 1 - \alpha - 1/\alpha)$$

という関係になり，$n>3$ であるならば左固有ベクトル法がよいことが分かる [2]．(注：幾何平均法ならば真のウェイトと一致する．)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1/\alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1/\alpha & 1 & \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha & 1/\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

このように，固有ベクトルを利用してウェイトを推定する際に，左固有ベクトルを使用した方法でウェイトを推定した方がよい場合がある．

そこで，本研究では，ある誤差が含まれる要素がつぎのようなパターンの場合について考察する．

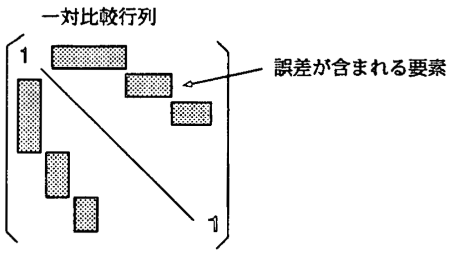

図 1：誤差要素

誤差要素が一対比較行列のある 1 行に含まれていてその他の要素は，1 であるとすると次の定理が成り立つ．

定理 1 一対比較行列において第 1 行の第 2 要素から第 s 要素まで $a(>1)$ とし，他のすべての要素を 1(だたし，逆数性は保持) とする．このとき，固有ベクトル法における推定ウェイトを $\hat{w}$，左固有ベクトル法における推定ウェイトを $\tilde{w}$ とすると

$$\|\hat{w}-\mathbb{1}\|_2 \geq \|\tilde{w}-\mathbb{1}\|_2.$$

ここで，$\mathbb{1}$ はすべての要素が 1 のベクトル．

3. 数値実験

数値実験は，7 項目の一対比較行列について行い，

このときの真のウェイトは，0.1 から 1.0 までの一様分布から各回ごとに 7 つ選択した．a の値がばらつく場合は，a の値は対数正規分布に従うものとした．なお，標準偏差の値は，指数をとる前の正規分布の標準偏差の値である．各シミュレーションは各値ごとに 10000 個の一対比較行列を作り，そのウェイトを推定した．

3.1 誤差要素が 1 行のみにある場合

項目数 7 の一対比較行列に対して第 1 行目の 4 つの要素に誤差 (a) を導入する．

● 誤差 $a = 2$ の場合のヒストグラム

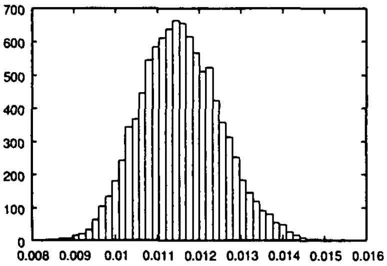

図 2 : $a = 2$ の場合のヒストグラム

● 誤差 a の値が誤差要素で同じ場合

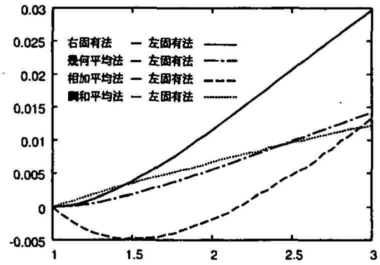

図 3 : a の値と真のウェイト w からの距離

● 誤差 a の値が要素間でばらつく場合 ($a \geq 1$)

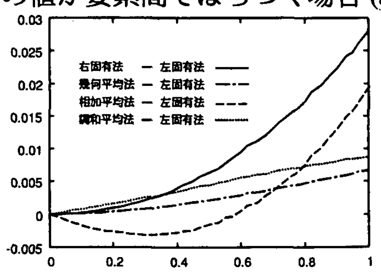

図 4 : a の標準偏差と w からの距離

● 誤差 a の値が要素間でばらつく場合

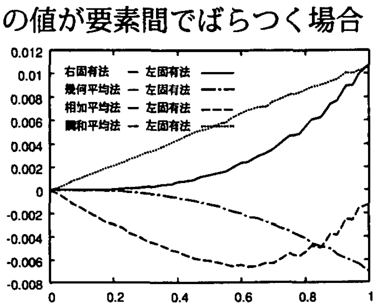

図 5 : a の標準偏差と w からの距離

3.2 誤差要素が 3 行にわたる場合

項目数 7 の一対比較行列の第 1 行目の 2,3 要素，第 2 行目の 4,5 要素と第 3 行目の第 6 要素に誤差を導入する．

● 誤差 a の値が誤差要素で同じ場合

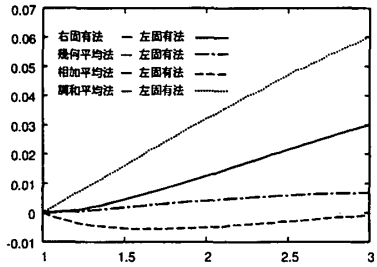

図 6 : a の値と真のウェイト w からの距離

● 誤差 a の値が要素間でばらつく場合 ($a \geq 1$)

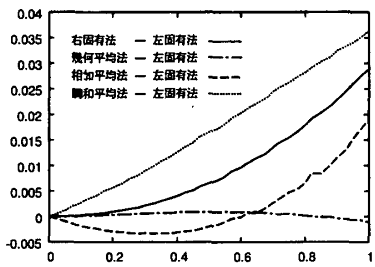

図 7 : a の標準偏差と w からの距離

● 誤差 a の値が要素間でばらつく場合

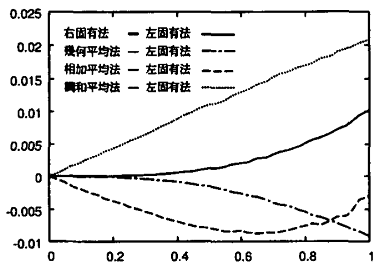

図 8 : a の標準偏差と w からの距離

4. まとめ

一対比較する際に，ある項目を基準にして何倍であるかを考える場合に，その比較値に誤差があるときには，左固有ベクトル法の方が推定ウェイトの誤差が小さい．誤差の要素に偏りがあることが分かっているときは，幾何平均法や調和平均法よりも左固有ベクトル法がよいことが分かる．

参考文献

[1] 加藤豊，小澤正典, “行列ノルムによる一対比較行列からのウェイト推定”, 日本 OR 学会度春季研究発表会 アブストラクト集, 2002

[2] 加藤豊，小澤正典, “ AHP における誤差のウェイト推定法と誤差の関係”, 日本 OR 学会度秋季研究発表会 アブストラクト集, 2003