日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

ひとつの機会制約をもつ割当問題について

01007584 大阪工業大学 一森 哲男 ICHIMORI Tetsuo

1. はじめに

割当問題のコストの値を確率変数と仮定する．コストを表す確率変数を大文字 C_{ij} とする．全コストの確率変数がある値以下となる確率が，ある信頼度以上となる最適な割当を求める．

以下，$x_{ij} \in \{0,1\}$ for $i,j=1,\dots,n$ は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1$ for $i=1,\dots,n$ かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1$ for $j=1,\dots,n$ を満たすとする．

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{P}_1) & \min f & \\
\text{s.t.} & \Pr\left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \le f \right\} \ge \alpha &
\end{array}
$$

これはよく知られた，Charnes と Cooper の機会制約計画 [1] に属する問題である．

各コスト C_{ij} がどのような分布に従っていようとも，お互いに独立であれば，中心極限定理より，問題 (P_1) は近似的に以下の問題に書き換えることができる．K_α は，標準正規分布に従う確率変数が K_α 以下となる確率が α となる値と定義する．例えば，$\alpha = 0.975$ のとき $K_\alpha = 1.96$ である．

(P_2)

$$
\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{ij} + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_{ij}}
$$

2. 平面上に射影した問題

割当多面体の端点は全部で $n!$ 個であるが，これらに適当に番号を与える．k 番目の端点 $\{x_{ij}^k\}$ に対し，$\mathbb{R}_+^2$ 平面上に次の $n!$ 個の点 $\{(y_1^k, y_2^k) \mid k=1,\dots,n!\}$：

$$
\begin{aligned}
y_1^k &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_{ij}^k, \\
y_2^k &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{ij}^k
\end{aligned}
$$

を定義すると，問題 (P_2) は次のように書きなおせる．

$$
\min_{k=1,\dots,n!} K_\alpha \sqrt{y_1^k} + y_2^k.
$$

$\mathbb{R}_+^2$ 平面上で関数 $K_\alpha\sqrt{y_1} + y_2$ は凹関数なので，これの最小値は，$n!$ 個の点の凸包の端点で実現する．この凸包を $\mathcal{H}$ とすると，問題 (P_2) は $\mathbb{R}_+^2$ 上の最適化問題 (P) に帰着される．

$$
(\mathrm{P}) \qquad \min_{y_1,y_2 \in \mathcal{H}} K_\alpha \sqrt{y_1} + y_2.
$$

各端点 (y_1^k, y_2^k) は他の端点 (y_1^j, y_2^j) に対し，$y_1^j \le y_1^k, y_2^j \le y_2^k$ ならば $(y_1^j, y_2^j) = (y_1^k, y_2^k)$ となるとき，極小端点と呼ばれる．明らかに，極小端点で (P) の最小値が実現する．

問題 (P) は 2 変数最適化であるが，制約の凸包 $\mathcal{H}$ の極小端点を効率よく見つけことができなければ，(P) を効率的に解くことが難しい．そこで，正の定数 p に対し，次の問題 (Q) を考える．

$$
(\mathrm{Q}) \qquad \min_{y_1,y_2 \in \mathcal{H}} p y_1 + y_2.
$$

この問題は $c_{ij}(p) = m_{ij} + p v_{ij}$ とした確定問題と等価である．つまり $O(n^3)$ のアルゴリズム [2] で解ける．よって，以下の議論では問題 (Q) は $O(n^3)$ のアルゴリズムで $\mathbb{R}_+^2$ 平面上の最適点が求まると考える．

p の値をいろいろ変化させることにより凸包 $\mathcal{H}$ の極小端点を見つけることができる．しかし，すべての極小端点を見つけるために，変化させるべき p の異なる値の数は少なくとも極小端点の数以上に必要である．しかし，必要なものは (P) の最適な端点のみで，すべての極小端点を見つける必要はない．そこで，効率的に (P) の最適な端点を見つける方法を以下で考える．

3. 最適端点の探索

こでは，問題 (Q) を解くことにより，(P) の最適な極小端点を効率的に見つける方法を考える．凸包 $\mathcal{H}$ の異なる極小端点が総計 $m \geq 2$ 個あるとして，辞書式的に小さいものから順に番号を与える．

$$(y_1^1, y_2^1) \prec (y_1^2, y_2^2) \prec \cdots \prec (y_1^m, y_2^m)$$

$k \in \{2, \ldots, m\}$ に対し，2 点 (y_1^{k-1}, y_2^{k-1}), (y_1^k, y_2^k) を結ぶ線分の傾きの絶対値を s_k とすると

$$s_k = \frac{y_2^{k-1} - y_2^k}{y_1^k - y_1^{k-1}}$$

となる．

このとき，$\mathcal{H}$ の凸性より

$$s_2 > s_3 > \cdots > s_m$$

となる．また，$s_k > p > s_{k+1}$ とした問題 (Q) の唯一の最適解は端点 (y_1^k, y_2^k) である．

$\mathbf{R}_+^2$ 平面上で極小端点 (y_1^k, y_2^k) は曲線

$$K_\alpha \sqrt{y_1} + y_2 = K_\alpha \sqrt{y_1^k} + y_2^k \qquad (1)$$

上に存在している．極小端点 (y_1^k, y_2^k) での接線は

$$y_2 - y_2^k = -\frac{K_\alpha}{2\sqrt{y_1^k}}(y_1 - y_1^k) \qquad (2)$$

である．よって，k 番目の端点 (y_1^k, y_2^k) が $p = \frac{K_\alpha}{2\sqrt{y_1^k}}$ としたときの問題 (Q) の最適解であるならば，次の関係が成り立つ．

$$s_k \geq \left| -\frac{K_\alpha}{2\sqrt{y_1^k}} \right| \geq s_{k+1}.$$

さらに，曲線 (1) 上に存在するか，あるいは，この曲線より完全に上側に存在する極小端点 (y_1^i, y_2^i) は明らかに

$$K_\alpha \sqrt{y_1^i} + y_2^i \geq K_\alpha \sqrt{y_1^k} + y_2^k$$

である．言い換えれば，問題 (P) にとって，これらの解，つまり，極小端点 (y_1^i, y_2^i) は端点 (y_1^k, y_2^k) より好ましい解ではない．しかも，端点 (y_1^k, y_2^k) を除き，これらは直線 (2) より完全に上側に存在するので，決して $p = \frac{K_\alpha}{2\sqrt{y_1^k}}$ としたときの問題 (Q) の最適解には選ばれない．よって，$p = \frac{K_\alpha}{2\sqrt{y_1^k}}$ としたときの問題 (Q) を解いたとき，次のふたつの場合のどちらかが生じる．

- k 番目の端点 (y_1^k, y_2^k) が見つかる．
- k 番目の端点 (y_1^k, y_2^k) より完全に好ましい端点が見つかる．

前者の内容は明らかであるが, 後者は端点 (y_1^k, y_2^k) より好ましくない端点は見つからないことから導かれる．

このことは重要で，極小端点 (y_1^k, y_2^k) が (P) の最適解ならば，上記の後者の場合は生じないので，この端点が $p = \frac{K_\alpha}{2\sqrt{y_1^k}}$ としたときの問題 (Q) の唯一の最適解であることを意味する．

参考文献

[1] A. Charnes and W.W. Cooper, Chance–Constrained Programming, *Management Science*, **6**(1959), 73–79.

[2] H.W. Kuhn, The Hungarian Method for the Assignment Problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, **2**(1955), 83–97.