日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

一般上限制約付き大規模集合被覆問題

−鉄道の乗務員運用計画に対するラグランジュ緩和アプローチ−

早稲田大学 * 斎藤 秀和 SAITOH Hidekazu
01012600 東洋大学 今泉 淳 IMAIZUMI Jun
01603200 早稲田大学 森戸 晋 MORITO Susumu
01505160 (財) 鉄道総合技術研究所 福村 直登 FUKUMURA Naoto

1 研究の背景と目的

集合被覆問題 (SCP) は，鉄道・航空機の乗務員スケジュールの決定をはじめ，多くの応用例を持つ組合せ最適化問題である．

一方，鉄道会社や航空会社では，ダイヤに対して効率的な乗務スケジュール（以下，乗務員運用計画）を作成する必要がある．本研究では，鉄道の乗務員運用計画に対して，各乗務員が 1 回の勤務で乗務する列車の割当て (以下，行路) を予め生成しそれらを組合せて計画全体を決定する集合被覆問題としてのアプローチの評価をし，その問題点を指摘した上で，一般上限制約付き集合被覆問題の解法を提案し，その性能や計画の実用性を評価する．

2 従来の研究

乗務員運用計画に対しては，予め行路候補（以下，行路案）を列挙し最適な組合せを決定する方法と，必要に応じて行路を生成する列生成法に大別できる．Caprara ら [1] は前者に基づき，乗務員運用計画を集合被覆問題に定式化している．しかし，集合被覆問題は，同一乗務に複数の乗務員が割当てられる「便乗」の抑制や，基地の乗務員数を考慮できない．本研究は，集合被覆問題による定式化の結果を踏まえた上で，より現実的な計画立案のために一般上限制約 (GUB) を付加した問題を考える．

3 集合被覆問題としてのアプローチ

集合被覆問題による定式化による，乗務員運用計画の目的関数以外の各種尺度への影響を検証する．解法は，Caprara ら [1] の方法を用いる．

3.1 集合被覆問題への定式化

集合と定数

- M 乗務の集合
- N 行路案の集合
- c_j 行路 $j \in N$ のコスト
- a_{ij} 乗務 $i \in M$ が行路 j に含まれるとき 1, さもなくば 0

決定変数

- x_j 行路 j を選択するとき 1, さもなくば 0

定式化

(P)

$$\min \quad z = \sum_{j \in N} c_j x_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i \in M \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\}, j \in N \tag{3}$$

3.2 ラグランジュ緩和問題

(2) 式に非負のラグランジュ乗数 u_i 乗じてラグランジュ緩和する．

(LR)

$$\min \quad \sum_{j \in N} \left(c_j - \sum_{i \in M} a_{ij} u_i \right) x_j + \sum_{i \in M} u_i \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad x_j \in \{0,1\}, j \in N \tag{5}$$

(LR) の最適解は，x_j の係数の符号から簡単に得られる．

3.3 Caprara らのアルゴリズムのポイント

列数が非常に多い問題を扱うため，上界値・下界値の計算の際に，解に取り込むのが望ましいと思われる列だけに絞った問題 (コア問題) を作り，問題の規模を小さくし，計算時間を短縮する．

3.3.1 上界値の算出

ラグランジュ乗数の値をもとに，ヒューリスティックによって上界値を算出する．

- 手順 1 解に取り込まれていない列 j の評価関数値を計算する．
- 手順 2 評価関数値が最小の列を解に取り込む．実行可能解が得られたら手順 3 へ，さもなくば手順 1 へ．
- 手順 3 冗長な列を削る．

3.3.2 下界値の算出

ラグランジュ緩和問題 (LR) に対し，乗数の更新に劣勾配法を用いることによって，元問題 (P) の下界値を算出する．

3.4 予備実験

現実のダイヤに基づく問題に対して得られた計画の尺度の値を，表 1に示す．得られた計画は，例えば，実務的には最大で 3 程度しか許されない 1 乗務の最大便乗数が 6,7 と多く，現実的でない．そこで，これを抑制する制約が必要となる．

表 1: 得られた計画の評価

評価尺度	72,954	136,254	263,657
UB(乗務員数)	134	132	129
LB	123	119	118
GAP(%)	8.94	10.92	9.32
総便乗数	164	158	126
1 乗務の最大便乗数	6	7	6

4 一般上限制約の付加

各乗務における便乗数の制約を，一般上限制約として扱う．

4.1 一般上限制約付き集合被覆問題

d_i を 乗務 i の便乗数の上限としたときに，一般上限制約を問題 (P) の定式化に付加すると，以下のようになる．
(P')

$$\min \quad z = \sum_{j \in N} c_j x_j \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leq d_i + 1, \quad i \in M \tag{7}$$

$$(2), (3)$$

4.2 一般上限制約付き集合被覆問題の解法

一般上限制約を付加することにより，新たに精度の高いヒューリスティックが必要となる．本研究では，Caprara ら [1] の解法をもとに，シフト近傍とスワップ近傍を組合わせたメタ解法を考える．

4.2.1 近傍

解法に用いる 2 つの近傍を以下のよう定義する．

シフト近傍 1 つの行路の取捨を変更することによって得られる解の集合

スワップ近傍 選択されている行路と選択されていない行路を交換することによって得られる解の集合

4.2.2 評価関数

実行不可能解も探索の対象とするため，本来の目的関数とは別に，解に対する評価関数を定義する．ここでは，(P') の (2),(7) 式の制約違反量をそれぞれ

$$p_{1i}(x) = \max\left(1 - \sum_{j \in N} a_{ij} x_j, 0\right) \quad i \in M,$$

$$p_{2i}(x) = \max\left(\sum_{j \in N} a_{ij} x_j - d_i - 1, 0\right) \quad i \in M,$$

ペナルティ重みをそれぞれ α_{1i}，α_{2i} として，評価関数を以下のように定義する．

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j \in N} c_j x_j + \sum_{i \in M} \alpha_{1i} p_{1i}(x) + \sum_{i \in M} \alpha_{2i} p_{2i}(x), \forall i, j$$

4.2.3 上界値算出アルゴリズム

手順 0 下界値・ラグランジュ乗数を算出する．

手順 1 初期解生成・ペナルティ重みの初期設定し，シフト回数 l:=0 とする．

手順 2 シフト近傍の探索を行う．l:=l+1 とする．

手順 3 スワップ近傍の探索を一定回数繰り返す．

手順 4 ペナルティ重みの自動調整を行う．

手順 5 最良解よりも良い実行可能解が得られたら最良解を更新する．$l = L$ ならば最良解を出力して終了．さもなくば，手順 2 へ．

4.2.4 下界値の算出

(P') の (2)，(7) をラグランジュ緩和し，乗数の更新に劣勾配法を用いて下界値を得る．

表 2: 一般上限制約の有無の比較 (ケース 1)

評価尺度	GUB 無し	GUB 付き
UB(乗務員数)	135	138
LB	121	123
GAP(%)	11.6	12.2
総便乗数	122	130
1 乗務の最大便乗数	11	3

乗務:488, 行路案:20,137

表 3: 一般上限制約の有無の比較 (ケース 2)

評価尺度	GUB 無し	GUB 付き
UB(乗務員数)	135	133
LB	123	123
GAP(%)	9.8	8.1
総便乗数	108	98
1 乗務の最大便乗数	3	3

乗務:488, 行路案:937

4.3 数値実験:一般上限制約の有無の比較

メタ解法を用いて一般上限制約付き集合被覆問題を解き，集合被覆問題を解いた結果と比較する．

ケース 1(表 2) の場合，一般上限制約付き集合被覆問題を解くことにより，わずかな目的関数値の増加で，集合被覆問題で過剰な値となっていた 1 乗務の最大便乗数を抑えることができる．

ケース 2(表 3) の場合，集合被覆問題でも 1 乗務の最大便乗数の少ない解が求まるが，一般上限制約付き集合被覆問題を解くことにより，同じ便乗数でさらに良い目的関数値をとり，総便乗数も少ない解が得られる．

5 結論

- 一般上限制約付き集合被覆問題に対するラグランジュ緩和を利用した解法を提案した．
- 得られる解の質から，一般上限制約を付加することの有用性を示した．

参考文献

[1] A. Caprara, M. Fischetti and P. Toth, "A heuristic method for the set covering problem," *Operations Research*, Vol.47, No.5, pp.730-743, 1999.

[2] 小川健一他. 多拠点乗務員運用問題に対する列生成アプローチ, OR 学会 2004 年度春季研究発表会予稿集，2004

[3] 柳浦睦憲，茨木俊秀，"組合せ最適化-メタ戦略を中心として-"，pp.164-170, 朝倉書店, 2001.