鉄道の多拠点乗務員運用問題に対する列生成アプローチ

早稲田大学 ＊小川 健一 OGAWA Kenichi
01012600 東洋大学 今泉 淳 IMAIZUMI Jun
01603200 早稲田大学 森戸 晋 MORITO Susumu
01505160 (財) 鉄道総合技術研究所 福村 直登 FUKUMURA Naoto

1 研究の目的

鉄道の乗務員運用問題は，所与のダイヤに対して全列車を運行するために必要な費用が最小となる乗務員運用計画を作成する問題である．本研究は，現実的な行路制約を考慮した鉄道の多拠点乗務員運用問題に対する列生成アプローチを提案する．そして，他のアプローチとの比較や，得られた乗務員運用計画を分析し，解の精度や計算時間などの観点から解法を評価する．

2 定式化

本研究は，全列車を乗換可能駅で分割しそれを乗務と称して，整数計画問題として定式化する．

集合と定数	
K	乗務員基地の集合
M	乗務の集合
N^k	乗務員基地 $k \in K$ に所属する乗務員の集合
$Cost(z_j^k)$	行路 z_j^k のコスト関数（日勤=1, 夜勤=2）
決定変数	
z_j^k	乗務員基地 k に所属する乗務員 j に割当てる行路を表す $\|M\|$ 次元の列ベクトル
z_{ij}^k	乗務員基地 k に所属する乗務員 j が乗務 i を乗務するとき 1，さもなくば 0

元問題 (IP)

$$\min \quad \sum_{k\in K}\sum_{j\in N^k} Cost(z_j^k) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k\in K}\sum_{j\in N^k} z_{ij}^k \geq 1 \forall i \in M, \tag{2}$$

$$A^k z_j^k \leq b^k \quad \forall j \in N^k, \forall k \in K, \tag{3}$$

$$z_{ij}^k \quad \text{binary}. \tag{4}$$

(1) 式は総勤務日数の最小化である．(2) 式は全乗務の被覆制約で，各乗務は必ず一人以上の乗務員が乗務する必要がある．(3) 式は行路制約で，各行路が満たすべき条件である．

3 列生成法による解法

3.1 元問題の再定式化

y_{jp}^k を，乗務員基地 k の乗務員 j に割当可能な p 番目の行路を表す列ベクトルとすると，元問題の z_j^k の解集合 S_j^k は $S_j^k = \{y_{jp}^k\}_{p\in P_k}$ と表せる．そこで，凸結合を利用して以下の主問題 IPM に等価変換できる．

集合と定数	
P^k	乗務員基地 k に属する行路集合
$\bar{P}^k$	乗務員基地 k に属する行路 P^k の部分集合
y_p^k	乗務員基地 k に属する p 番目の行路
決定変数	
λ_p^k	乗務員基地 k に属する p 番目の行路を乗務員運用計画に選択するとき 1，さもなくば 0

主問題 (IPM)

$$\min \quad \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} Cost(y_p^k)\lambda_p^k \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} y_p^k\lambda_p^k \geq 1\forall i \in M, \tag{6}$$

$$\sum_{p\in P^k} \lambda_p^k \leq |N|\forall k \in K, \tag{7}$$

$$\lambda_p^k \quad \text{binary}. \tag{8}$$

ここで，IPM を線形緩和した線形主問題 LPM を考える．さらに，主問題は列数が膨大であるため，一部の行路集合 $\bar{P}^k$ のみを用いた限定主問題 RLPM を対象として解く．

3.2 列生成子問題

列生成子問題は，行路制約を満たし被約費用が最小となる列を生成する問題である．列の被約費用は RLPM を解いたときの (6) 式の双対変数 π を用いて求まる．

生成された列の被約費用が負である限り，その列を追加することで RLPM の解が改善されるため，再び列を加えた RLPM を解くことを繰り返す．各々の乗務員基地で生成された最小被約費用の列が 0 に収束したとき，LPM に対する現時点の RLPM の最適性が保証され，それが IPM の下界値となり列生成を終了する．乗務員基地 k の最小被約費用 ξ_k は (9) 式で求まる．

$$\xi_k = \min\left\{Cost(z^k) - \sum_{i\in M}\pi_i z_i^k | (3)\right\} \tag{9}$$

3.3 列生成子問題のネットワーク表現と動的計画法

本研究は，乗務をノード，ノード間の枝は両端の乗務が1つの行路内で連続乗務が可能とし，各ノードの費用を(6)式の双対変数とすることで，列生成子問題をネットワーク問題として表現する．すなわち，行路制約を満たす行路の中で最小被約費用の行路に対応するパスを求める制約付き最短路問題に帰着できる．本研究では，この問題に動的計画法を適用する．そこで，以下の状態変数と最適値関数を定義する．

Num	現時点までに通ったノード数
$Node$	現時点のネットワーク上のノード
$Time$	現時点の勤務時間などの労働状態
$Cost($ 状態変数 $)$	状態変数で表されたパスに対応する行路の中の最小被約費用値

再帰式の導出

$Next$ は $Node$ から枝が張られた次のノードを示し，$T_{Node,Next}$ は $Node$ に対応する乗務の着時刻と $Next$ に対応する乗務の着時刻の差である．また，π_{Next} は $Next$ に対応する乗務の(10)式の双対変数を示す．そこで，以下の最適値関数の再帰式を導出する．

$$Cost(Num, Next, Time + T_{Node,Next}) = \min Cost(Num-1, Node, Time) + \pi_{Next} \tag{10}$$

勤務開始に対応する $Cost(0,$ 基地，勤務開始状態$)$ を0に初期設定し，(10)式を用いて勤務開始から終了まで再帰的に計算する．そして，Num が「行路内乗務数」，$Node$ が「基地」を満たす $Cost($ 状態変数 $)$ のうち最小被約費用の行路が，列生成子問題の最適解となる．

3.4 上界値の算出方法

本研究では，列生成アプローチで得られた行路案集合から集合被覆問題をつくり，上界値を算出する．また，厳密解を得るのは時間を要するため，Caprara ら[1]の集合被覆問題の近似解法をもとにしたメタ解法[2]を用いる．

4 数値実験

使用した計算機は，Pentium4 2.78GHz(メモリ 2GB)のパーソナルコンピュータである．

4.1 時刻表データを用いた数値実験

ある実在の線区のデータ(乗務数488，拠点数3)に対して本アプローチを適用し，これから得られる乗務員運用計画を分析した結果を表1に示す．また，列挙法によって行路を生成しこれを列とする集合被覆問題を解く古典的方法と比較する．

4.2 列の追加方法による比較

生成した列の追加する方策はいくつか考えられるが，ここでは以下の3種類の方法の比較を表2に示す．

方法1　各基地の最小被約費用の列
方法2　各基地の日勤・夜勤ごとの最小被約費用の列
方法3　各基地の日勤・夜勤の行路内乗務数ごとの最小被約費用の列(本アプローチで採用)

4.3 列生成の終了条件による比較

列生成法の最小被約費用の収束の様子，その途中段階の経過時間，総行路案数や上界値の関係を表3と図4に示す．

表 1: 時刻表データによる数値実験

乗務員運用計画	列生成法	古典的方法
総行路案数	937	727,524
計算時間	3.07	4.00
上界値	133	150
下界値	122.1	105.7
双対ギャップ	8.1	41.5
日勤行路数	59	60
夜勤行路数	37	45
便乗のある乗務数	81	90
総便乗数	98	187
最大便乗数/乗務	3	11
平均便乗数/乗務	0.20	0.38

(計算時間の単位は時間)

表 2: 列の追加方法による比較

追加方法	方法1	方法2	方法3
計算時間	4.28	2.75	2.27
総行路案数	411	556	617
上界値	143	139	138
下界値	126.1	124.1	125.6
双対ギャップ	12.6	11.2	9.5

(計算時間の単位は時間)

表 3: 列生成法の終了条件による比較

終了条件		経過時間	総行路数	上界値
未被覆行なし	①	2189	228	162
収束値 -2	②	2309	240	158
収束値 -1	③	2659	276	155
収束値 -0.5	④	8163	617	139
列生成終了	⑤	1,1036	937	133

(計算時間の単位は秒)

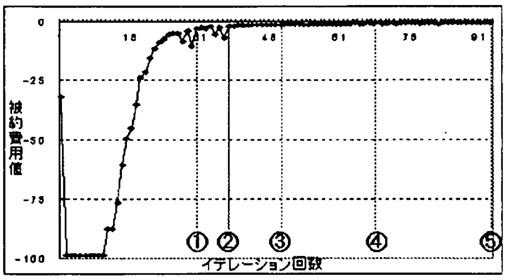

表 4: 被約費用の収束

5 考察と結論

本研究の列生成アプローチは，古典的アプローチと比べて解の質も計算時間も優れており，乗務員運用計画の総便乗数なども列生成法の結果が良い．また，複数の時刻表データに対しても，現実的な計算時間で良い結果を得られた．

参考文献

[1] A. Caprara, M. Fischetti and P. Toth, "A heuristic method for the set covering problem," *Operations Research*, Vol.47, No.5, pp.730-743, 1999.

[2] 斉藤秀和他．一般上限制約付大規模集合被覆問題，OR学会 2004年度春季研究発表会予稿集，2004