日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

# 単調なマルコフ連鎖とネットワークモデルへの応用

01009830 駒澤大学 *小沢利久 OZAWA Toshihisa
02302860 東京工業大学 高橋成晃 TAKAHASHI Nariaki
01302440 東京工業大学 高橋幸雄 TAKAHASHI Yukio

## 1. はじめに

マルコフ連鎖の単調性の応用例を二つ示す．ひとつは，閉ジャクソンネットワークのパーフェクトシミュレーションであり，もう一つは移動体通信ネットワークの性能評価量の上下限を求める問題である．

## 2. 単調なマルコフ連鎖

### 2.1. 更新関数

ネットワークモデルへの応用を前提に，離散時間マルコフ連鎖 (DTMC) $\{\hat{\mathbb{X}}(n)\}$ について考える．ここで，$\hat{\mathbb{X}}(n)$ は $\mathbb{Z}_+^L$ 上のベクトル $\hat{\mathbb{X}}(n) = (\hat{X}_1(n), ..., \hat{X}_L(n))$ であるとし，$\{\hat{\mathbb{X}}(n)\}$ の有限な状態空間を $\mathbb{S} \subset \mathbb{Z}_+^L$ とする．また，$\mathcal{L} = \{1, ..., L\}$ とする．例えば，待ち行列ネットワークでは，$\hat{X}_\ell(n)$ はノード $\ell$ 内の客数に対応する．$\mathbb{P}$ を $\hat{\mathbb{X}}(n)$ の推移確率行列とする．また，$\mathbb{S}$ 上の半順序 $\leq$ を，$(\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow (x_\ell \leq y_\ell, \ell \in \mathcal{L})$ で定義する．

次に，$\{U_n\}$ を，$[0,1)$ 区間の一様分布に従う i.i.d. 確率変数列とし，$\varphi : \mathbb{S} \times [0,1) \to \mathbb{S}$ を推移確率行列 $\mathbb{P}$ に対応する更新関数とする．この時，$\{\hat{\mathbb{X}}(n)\}$ は，$\hat{\mathbb{X}}(0)$ を初期状態として，次で与えられる．

$$\hat{\mathbb{X}}(n+1) = \varphi(\hat{\mathbb{X}}(n), U_{n+1}), \; n \geq 1 \tag{1}$$

(同じ推移確率行列に従う DTMC を同一視した.) 以下では，このことを「DTMC は $\varphi$ によって表現できる」ということにする．更新関数の与え方は一意ではない．更新関数はそのまま DTMC のシミュレーション方法となっている．

### 2.2. 単調性

DTMC の単調性には幾つかの定義があるが [2]，この資料では更新関数を用いた次の定義を使う．

**Definition 1** DTMC $\{\hat{\mathbb{X}}(n)\}$ が，任意の $u$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{x}, u) \leq \varphi(\boldsymbol{y}, u) \tag{2}$$

を満たす，ある更新関数 $\varphi$ によって表現できる時，単調であるという．

同様にして，同じ状態空間 $\mathbb{S}$ 上で定義された二つの DTMC $\{\hat{\mathbb{X}}^{[1]}(n)\}$, $\{\hat{\mathbb{X}}^{[2]}(n)\}$ に対して，単調な関係を次で定義する．

**Definition 2** DTMC $\{\hat{\mathbb{X}}^{[1]}(n)\}$, $\{\hat{\mathbb{X}}^{[2]}(n)\}$ が，任意の $u$ に対し，

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Rightarrow \varphi^{[1]}(\boldsymbol{x}, u) \leq \varphi^{[2]}(\boldsymbol{y}, u) \tag{3}$$

を満たす，ある更新関数 $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}$ によって表現できる時，両者は単調な関係にあるという．

$\mathbb{S}$ 値確率ベクトルに対する確率順序 $\leq_{st}$ を次で定義する．

**Definition 3** $\mathbb{S}$ 値確率ベクトル $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ が，任意の有界で非減少な実数値関数 $f$ に対して，$\mathrm{E}[f(\mathbb{A})] \leq \mathrm{E}[f(\mathbb{B})]$ を満たす時，$\mathbb{A} \leq_{st} \mathbb{B}$ であるとする．

エルゴード的な DTMC $\{\hat{\mathbb{X}}^{[1]}(n)\}$, $\{\hat{\mathbb{X}}^{[2]}(n)\}$ の定常分布に従う確率ベクトルを $\hat{\mathbb{X}}^{[1]}$, $\hat{\mathbb{X}}^{[2]}$ とする．この時，直ちに次が得られる [2].

**Lemma 1** $\{\hat{\mathbb{X}}^{[1]}(n)\}$ と $\{\hat{\mathbb{X}}^{[2]}(n)\}$ が式 (3) の意味で単調な関係にあれば，$\hat{\mathbb{X}}^{[1]} \leq_{st} \hat{\mathbb{X}}^{[2]}$ が成り立つ．

例えば，$\{\hat{\mathbb{X}}^{[1]}(n)\}$ を評価対象のモデルとし，この Lemma 1 の条件を満たすようなモデル $\{\hat{\mathbb{X}}^{[2]}(n)\}$ が構成できれば，そのモデルより，評価量 $\mathrm{E}[f(\hat{\mathbb{X}})]$ の上限が得られることになる．

### 2.3. 更新関数の分解

DTMC $\{\hat{\mathbb{X}}(n)\}$ の状態変化を引き起こす可能性のある排反な事象の集合を $E$ とし，事象 $e \in E$ が起きた場合の状態変化を表す関数を $\varphi_e : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ とする．各 $e \in E$ に対して，$p_e$ を事象 $e$ が起きる確率とし，関数 $\delta_e : [0,1) \to \{0,1\}$ を，$\int_0^1 \delta_e(u)du = p_e$ を満たす適当な関数とする．この時，更新関数 $\varphi$ は，$\varphi(\boldsymbol{x}, u) = \sum_{e \in E} \delta_e(u)\varphi_e(\boldsymbol{x})$ で与えられる．よって，単調性のチェックは，各 $\delta_e$ について行えばよい．

## 3. 閉ジャクソンネットワーク

### 3.1. パーフェクトシミュレーション

パーフェクトシミュレーション [1] とは，ある過去の時点から全ての状態を初期状態とするサンプルパスを同時に生成し，時点ゼロで全てのサンプルパスが同じ状態にあればその時点での状態を標本とするシミュレーション技法である．この標本は正確に定常分布に従う．しかし，状態数が多い場合には実行は難しく，sandwiching という次の方法を併用する．まず，状態空間上に半順序を定義し，その半順序に関して更新関数が単調であるとする．さらに，状態空間上に最大値と最小値が存在したとする．この時，この最大値と最小値を初期状態とする

サンプルパスのみを生成させ，時点ゼロで両サンプルパスが同じ状態にあればその時点での状態を標本とする．

### 3.2. 閉ジャクソンネットワークの場合

ノード数を $L$，ノード $\ell$ でのサービス率を $\mu$ ，ノード $\ell$ から $m$ へのルーチング確率を $r\ _m$ とする．各ノードのサーバー数は 1 とし，ネットワーク内には $K$ 人の客がいるものとする．この時，$X\ (t)$ をノード $\ell$ の客数として $\{\boldsymbol{X}(t)\}$ は連続時間マルコフ連鎖 (CTMC) となる．この CTMC の一様化によって得られる DTMC を $\{\hat{\boldsymbol{X}}(n)\}$ とし，その更新関数を $\varphi$ としておく．しかし，状態空間 $S = \{\boldsymbol{x} \in Z_+^L : x_1 + \ldots + x_L = K\}$ には半順序 $\leq$ に関する最大値も最小値も存在しないので，sandwiching は適用できない．

そこで，各ノードの容量が $K$ である，オーバーフローのある有限バッファネットワークを考える [3]．外部からの到着はなく，サービス率，ルーチング確率はもとのモデルと同じである．ただし，状態空間は $\tilde{S} = \{\boldsymbol{x} \in Z_+^L : 0 \leq x\ \ \leq K, \ell \in \mathcal{L} \text{ and } x_1 + \ldots + x_L \geq K\}$ とする．$\tilde{S}$ には最大値 $\bar{s} = (K, \ldots, K)$ が存在する．部分集合 $S \subset \tilde{S}$ は極小値の集合であり，既約な集合でもある．よって，$\varphi$ が $\tilde{S}$ 上で単調であれば，$\bar{s}$ を初期状態とするサンプルパスを生成し，そのサンプルパスの時点ゼロにおける状態が集合 $S$ 内にあればその時の状態を標本とすることで sandwiching と同様の結果が得られる．

ところで，状態変化を起こす事象は，任意の $\ell, m \in \mathcal{L}$ に対する，ノード $\ell$ から $m$ への客の移動 $e\ _m$ のみである．よって，$\varphi$ の単調性は関数 $\varphi_{e_{\ell m}}$ が単調であることから直ちに得られる．

## 4. 移動体通信ネットワーク

### 4.1. モデル

ここでは文献 [4] のモデルを考える．基地局数を $L$ とし，基地局 $\ell$ がカバーする領域をゾーン $\ell$ と呼ぶ．ゾーン $\ell$ は，基地局 $\ell$ が単独でカバーする領域であるエリア $\ell$ と，隣接するゾーン $m$ との重複領域であるエリア $(\ell, m)$ に区分される．簡単化のために，3 つ以上のゾーンが重複した領域はないものとする．

基地局 $\ell$ のチャネル数を $c$ とし，呼はエリア毎に独立なポアソン過程に従って発生するものとする．エリア $\ell$ の到着率を $\lambda$ ，エリア $(\ell, m)$ のそれを $\lambda_{(\ ,m)}$ とする．エリア $\ell$ で発生した呼は，基地局 $\ell$ に空きチャネルがあればそれに接続され，そうでなければ呼損となる．エリア $(\ell, m)$ で発生した呼は，まず，確率 $\frac{1}{2}$ で基地局 $\ell$ または基地局 $m$ に割り振られ，そこに空きチャネルがなければもう一方の基地局に割り振られる．そこでも空きチャネルがなければ呼損となる．通話時間は平均 $1/\mu$ の指数分布に従うものとする．

基地局 $\ell$ での呼の滞在時間は平均 $1/\gamma$ の指数分布に従う．滞在時間を超えて通話が継続した場合，呼は確率 $r\ _{,m}$ で隣接するゾーン $m$ の基地局へ移動する．移動した呼は，移動先に空きチャネルがあればそれを捕捉し（ハンドオーバー），なければその時点で強制切断となる．

以上の設定の下，$X\ (t)$ を基地局 $\ell$ の使用中チャネル数として，$\{\boldsymbol{X}(t)\}$ は CTMC となる．このマルコフ連鎖の一様化によって得られる DTMC を $\{\hat{\boldsymbol{X}}(n)\}$ とし，その更新関数を $\varphi$ としておく．状態空間は $S = \{\boldsymbol{x} \in Z_+^L : 0 \leq x\ \ \leq c\ , \ell \in \mathcal{L}\}$ である．

### 4.2. 上限と下限を与えるモデル

基地局数 $L$ が大きい場合，直接 $\{\hat{\boldsymbol{X}}(n)\}$ を扱うのは困難である．そこで，ゾーンの部分集合 $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ に注目し，より状態数の少ない DTMC による上下限の評価を考える．注目しないゾーンの集合を $\overline{\mathcal{L}}_0$ とする．$\{\hat{\boldsymbol{X}}(n)\}$ について，$\overline{\mathcal{L}}_0$ の基地局の全てのチャネルが常に使用中とした DTMC を $\{\hat{\boldsymbol{X}}^{[1]}(n)\}$，常に空きとした DTMC を $\{\hat{\boldsymbol{X}}^{[2]}(n)\}$ とする．$\{\hat{\boldsymbol{X}}^{[1]}(n)\}$ と $\{\hat{\boldsymbol{X}}^{[2]}(n)\}$ では，実質的には，$\mathcal{L}_0$ の基地局の使用中チャネル数のみを状態として持てばよいため，$\{\hat{\boldsymbol{X}}(n)\}$ より状態空間を小さくとれる．それぞれの更新関数を $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}$ としておく．

ところで，これらのモデルにおいて状態変化を起こす事象は，単独エリアからの発呼，重複エリアからの発呼，通話の終了，ハンドオーバーに分類される．それぞれの分類に対して起こりうる事象 $e$ を列挙し，各モデルについて関数 $\varphi_e$, $\varphi_e^{[1]}$, $\varphi_e^{[2]}$ を求めると，これらが単調な関係

$$\boldsymbol{x}^{[2]} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^{[1]} \Rightarrow \varphi_e^{[2]}(\boldsymbol{x}^{[2]}) \leq \varphi_e(\boldsymbol{x}) \leq \varphi_e^{[1]}(\boldsymbol{x}^{[1]})$$

を満たしているのが分かる．よって，非減少な実数値関数 $f$ により $\mathrm{E}[f(\boldsymbol{X})]$ と表される評価量の上下限がより状態数の少ない DTMC から得られることになる．評価量の例としては呼損率などがある．

## 5. おわりに

単調性は様々な視点から研究されている性質であるが，それを用いたネットワークモデルの評価例を示した．

### 参考文献


[1] Olle Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, Cambridge University Press (2002).

[2] A. Müller and D. Stoyan: *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, J. W. & S. (2002).

[3] T. Ozawa, Perfect Simulation of a Closed Jackson Network, 待ち行列シンポジウム, 彦根 (2004).

[4] T. Takahashi, T. Ozawa and Y. Takahashi, Bounds of Performance Measures in Large-Scale Mobile Communication Networks, *Perf. Eval.*, **54** (2003).