日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

待ち行列モデルと加法過程：数値計算から漸近特性まで

01602570　東京理科大学　宮沢 政清　MIYAZAWA Masakiyo

1. はじめに

待ち行列理論には，応用に触発された研究と理論的な興味からの研究がある．理論的研究の醍醐味は単純な原理を使ってモデルの仕組みを解明し，応用に利用されて役立つときである．本論では，加法過程という比較的単純な確率過程に的を絞り，その有用性を明らかにしたい．

ネットワークも含め広い意味での待ち行列モデルの目的は，不特定多数の客のサービス要求に対して公平で迅速なサービスを提供する方法を明らかにすることである．これらの客の到着やサービス要求量は不特定であり，確率モデルが用いられる．客の到着人数やサービス要求量を累積すると加法過程が現れる．

加法過程とは取る値に加法（足し算）が定義されているものである．よって，整数値，実数値，実ベクトル値などの確率過程をすべて加法過程とみなすことができる．$Y(t)$ を連続時間の加法過程とする．このとき，

$$Y(s+t) = Y(s) + (Y(s+t) - Y(s)), \quad s,t \geq 0,$$

であり，変化量 $\triangle Y(s,s+t) \equiv Y(s+t) - Y(s)$ を増分と呼ぶ．加法過程は漠然としていて，とても役立つとは思えないかもしれない．実際，扱いやすい加法過程が望ましい．この意味で，最も単純な加法過程は増分 $\triangle Y(s,s+t)$ が過去の履歴 $\{Y(u); u \leq s\}$ と独立な場合で，これを独立増分を持つ加法過程という．待ち行列の到着客数やサービス要求量の累計にはこれがよく当てはまることが多い．次の重要な結果が知られている．

定理 1 独立増分をもつ実数値過程 $\{Y(t)\}$ を Levy 過程という．特に，$Y(t)$ が t の連続関数であれば，$\{Y(t)\}$ は拡散過程であり，$Y(t)$ が離散的な時刻 t でのみ増加し，有限区間での増分が有限ならば，$\{Y(t)\}$ は複合ポアソン過程（一般には非定常）である．

時間が離散的で整数値を取る場合には，加法過程を $\{Y_n\}$ と表し，離散時間型加法過程と呼ぶ．増分 $\triangle Y_n \equiv Y_n - Y_{n-1}$ が $\{Y_\ell; \ell \leq n-1\}$ と独立で同一の分布に従う場合は，ランダムウォークと呼び，増分がマルコフ連鎖に依存するときマルコフ変調ランダムウォークと呼ぶ．マルコフ変調はモデルの範囲を飛躍的に広げる．

2. 待ち行列ネットワークと加法過程

待ち行列ネットワークを想定していただきたい．1 つのノード（ネットワークを構成する待ち行列）に注目し，その客数の定常分布を知りたいとする．このとき，十分に多くの状態を使って，ネットワーク全体をマルコフ過程として表し，定常分布を求め，その周辺分布から目的の分布を計算することが考えられる．しかし，この様な膨大な状態をもつマルコフ過程の定常分布の計算は，特別な場合を除き，不可能である．

そこで，各種の近似法が提案されているが，ここでは厳密な方法をとる．簡単のために，ネットワークの状態を離散時間かつ離散状態のマルコフ過程（以下，マルコフ連鎖と呼ぶ）で表すことができるとする．

各時刻 n に対して，Y_n を注目ノードの客数，X_n を注目ノードの客数を除いたネットワークのすべての状態（その集合を S）とする．Y_n は加法過程であるが，一般に X_n は加法過程ではない．しかし，(X_n, Y_n) はマルコフ連鎖であり，$\mathcal{F}_n = \{(X_m, Y_m); m \leq n\}$ とすると，任意の $i,j \in S$ と $k \in I\!N, \ell \in Z\!\!Z$ に対して，

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = j, \triangle Y_{n+1} = \ell | X_n = i, Y_n = k, \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\quad = P(X_{n+1} = j, \triangle Y_{n+1} = \ell | X_n = i, Y_n = k). \end{aligned}$$

ここで，$Y_n > 0$ である限り，X_n から X_{n+1} への推移は Y_n の影響を受けず，増分 $\triangle Y_{n+1}$ は Y_n とは独立であると仮定しよう．これは他のノードの客の動きが Y_n の値によって変わらない限り自然な仮定である．

3. マルコフ加法過程

前節の仮定の下で，$Y_n > 0$ に限定したときの X_n，Y_n の動きを X_n^+，Y_n^+ により表す．ここに，Y_n^+ は負の値も取るとする．$\mathcal{F}_n^+ = \{(X_m^+, Y_m^+); m \leq n\}$ とすると

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1}^+ = j, \triangle Y_{n+1}^+ = \ell | X_n^+ = i, Y_n^+ = k, \mathcal{F}_{n-1}^+) \\ &\quad = P(X_{n+1}^+ = j, \triangle Y_{n+1}^+ = \ell | X_n^+ = i). \end{aligned}$$

が成り立つ．この右辺を $A_\ell(i,j)$ と表す．$\{X_n^+\}$ はマルコフ連鎖であり，$\{(X_n^+, Y_n^+)\}$ を加法成分 Y_n^+ をもつマルコフ加法過程，X_n^+ を背後過程と呼ぶ．

逆に，この $\{(X_n^+, Y_n^+)\}$ を使って，ネットワーク過程 (X_n, Y_n) を構成してみよう．このために加法成分が ℓ から 0 になる推移確率 $B_\ell^-(i,j)$ と加法成分が 0 から ℓ になる推移確率 $B_\ell^+(i,j)$ を使う．推移確率行列 $P = \{P(X_{n+1} = j, Y_{n+1} = \ell | X_n = i, Y_n = k)\}$ を

$$P((i,k),(j,\ell)) = \begin{cases} A_{\ell-k}(i,j), & k,l > 0, \\ B_k^-(i,j), & k > 0, l = 0, \\ B_\ell^+(i,j), & k = 0, l \geq 0. \end{cases}$$

により定義する．この推移確率を持つマルコフ連鎖を反射壁を持つマルコフ加法過程と呼ぶ．

P は既約で行ベクトル $\boldsymbol{\nu} \equiv (\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\nu}_1, \ldots)$ で表される定常分布を持つとする．ここに，$\boldsymbol{\nu}_\ell(i)$ は $\{X_n = i, Y_n = \ell\}$ の定常確率である．$R_\ell^+(i,j)$ を初期状態が $(X_0^+, Y_0^+) = (i, 0)$ であるとき，加法成分が $\ell - 1$ 以下になる前に $(X_n^+, Y_n^+) = (j, \ell)$ となる回数の期待値，$R_{0\ell}^+(i,j)$ を (X_n, Y_n) に対する同様な期待値とすると，

$$\boldsymbol{\nu}_n = \boldsymbol{\nu}_0 R_{0,n}^+ + \sum_{\ell=1}^{n-1} \boldsymbol{\nu}_\ell R_{n-\ell}^+, \qquad n \geq 1. \tag{1}$$

が成り立つ．$G_\ell^-(i,j)$ ($H_0^-(i,j)$) を初期状態が $(X_0^+, Y_0^+) = (i, 0)$ であるとき，加法成分が初めて -1 以下の値 $\ell < 0$（初めて 0）になり，そのときの背後状態が j となる確率とする．$A_*(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} z^\ell A_\ell$, $R_*^+(z) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} z^\ell R_\ell^+$，$G_*^-(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{1} z^\ell G_\ell^-$ とおくと，次の Wiener-Hopf 分解が成り立つ．

$$I - A_*(z) = (I - R_*^+(z))(I - H_0^-)(I - G_*^-(z)). \tag{2}$$

加法過程の時間を逆転し加法成分の符号を変えた $\{(X_{-n}^+, -Y_{-n}^+)\}$ を双対過程と呼ぶ．双対過程に対して，R^+, G^-, H^- に対応し，方向を逆転したものを $\tilde{R}^+, \tilde{G}^-, \tilde{H}^-$ とする．$A_*(1)$ が定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ をもつとき，以下の双対関係が成り立つ．

$$R_\ell^+ = \Delta_{\boldsymbol{\pi}}^{-1} (\tilde{G}_\ell^+)^{\mathrm{T}} \Delta_{\boldsymbol{\pi}}, \qquad \ell \geq 1, \tag{3}$$

$$G_\ell^- = \Delta_{\boldsymbol{\pi}}^{-1} (\tilde{R}_\ell^-)^{\mathrm{T}} \Delta_{\boldsymbol{\pi}}, \qquad \ell \leq -1. \tag{4}$$

ここに，$\Delta_{\boldsymbol{\pi}}$ は $\boldsymbol{\pi}$ の成分を並べた対角行列である．

4. 数値計算への応用

反射壁を持つマルコフ加法過程において，すべての $\ell \geq 2$ に対して，$A_\ell = B_\ell^+ = 0$ ならば，$GI/M/1$ 型，逆に，すべての $\ell \leq -2$ に対して，$A_\ell = B_\ell^- = 0$ ならば，$M/G/1$ 型と呼ぶ．$GI/M/1$ 型ならば，$\ell \geq 2$ に対して $R_\ell^+ = 0$ であるから，(1) より，有名な Nuets の幾何行列解．

$$\boldsymbol{\nu}_n = \boldsymbol{\nu}_0 R_{0,1}^+ (R_1^+)^n, \qquad n \geq 1. \tag{5}$$

が得られる．同様に，$M/G/1$ 型ならば，$\ell \leq -2$ に対して $G_\ell^- = 0$ であり，(2) を使って，R_ℓ^+ が求められる．これらでは，背後状態集合 S が有限ならば，定常分布の数値計算や裾の漸近特性を得ることが可能となる．

5. 漸近特性への応用

一般に，状態空間 S は有限ではない．この場合には分布を求めることは困難であり，応用上の重要性から，分布の裾の漸近的な特性が注目される．[2] では，次の結果が得られている．

定理 2 ある $\alpha > 1$ と正のベクトル $\boldsymbol{\mu}(\alpha), \boldsymbol{h}(\alpha)$ で

$$\boldsymbol{\mu}(\alpha) A_*(\alpha) = \boldsymbol{\mu}(\alpha), \tag{6}$$

$$A_*(\alpha) \boldsymbol{h}(\alpha) = \boldsymbol{h}(\alpha) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\mu}(\alpha) \boldsymbol{h}(\alpha) < \infty, \tag{8}$$

を満たすものが存在し，$\boldsymbol{\nu}_0 B_*^+(\alpha) \boldsymbol{h}(\alpha) < \infty$ ならば

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^n \boldsymbol{\nu}_n = \frac{\boldsymbol{\omega}_0^{(\alpha)} \Delta_{\boldsymbol{\mu}(\alpha)}^{-1} \boldsymbol{\xi}(\alpha)^{\mathrm{T}}}{\beta(\alpha)} \boldsymbol{\mu}(\alpha) < \infty, \tag{9}$$

ここに，$\{A_\ell\}$ の周期は 1，$\beta(\alpha) = \alpha \boldsymbol{\mu}(\alpha) A_*'(\alpha) \boldsymbol{h}(\alpha)$, $\boldsymbol{\xi}(\alpha) = (\boldsymbol{h}(\alpha))^{\mathrm{T}} (I - (G_*^-(\alpha))^{\mathrm{T}})(I - (H_0^-)^{\mathrm{T}}) \Delta_{\boldsymbol{\mu}(\alpha)}$, $\boldsymbol{\omega}_0^{(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \boldsymbol{\nu}_0 R_{0,n}^+$ とする．

[1] では，境界条件をゆるめた場合（$Y_n = \ell > 0$ でも境界をもつが，$\ell \to \infty$ のとき，境界が消える）に，(9) と同様な結果を定理 2 より強い条件の下で導いている．

6. おわりに

定理 2 の適用範囲は必ずしも広くない．(8) などの有限条件が強いのである．これらの条件は反射壁の影響を反射壁上の確率的に有限な集合に限定できることを表すもので，これが成立しない場合には全く別のアプローチが必要である．現状では次の方法を推奨したい．

(i) ボトルネックノード（最も混雑しているノード）を探し，その客数を加法要素に選ぶ．

(ii) S を有限で打ち切り，打ち切りレベルを無限に大きくすることにより減少率の下限を求める．

(i) は，(8) などの有限条件を保証するためであり，これらの有限条件が成り立つ場合のみ，(ii) の下限は真の減少率に一致することが期待される．

参考文献

[1] McDonald, D.R. (1999) *Annals of Applied Probability* 9, 110-145.

[2] Miyazawa, M. and Y. Q. Zhao (2003) Preprint.