日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

2段直列型待ち行列に対する有限打ち切り近似の危険性

02203210　東京理科大学　*佐久間　大　SAKUMA Yutaka
01602570　東京理科大学　宮沢 政清　MIYAZAWA Masakiyo

1. はじめに

一般に待ち行列において待合室の大きさが無限の行列が1本のときは定常分布の数値計算が比較的容易であるが2本以上になると困難である。例えば2段直列型において1段目の待合室を制限してバックグラウンド状態とみなすことにより1本の待ち行列として計算ができる。これを有限打ち切り近似モデルとよぶ。このように状態空間が無限個の要素からなる待ち行列モデルの定常分布の数値計算を行うとき出現率の低い状態を制限しても良い近似が得られるように思われる。

本論文では、状態空間の有限打ち切り近似の妥当性を確かめるために、2段直列ジャクソン型待ち行列を例にとって調べる。このモデルは2本の待ち行列の待合室の大きさがそれぞれ無限である。一方、この場合の定常分布の理論値は容易に求めることができるので近似値との比較ができる。1段目の待合室を有限に制限したモデルが元のモデルを十分に近似しているか検討をするために、2段目の系内数の定常分布の減少率を比較した。

本研究により次のことがわかった。1段目のサービス率が2段目のそれ以上であるとき、2段目の近似減少率は理論値に収束する。1段目のサービス率が2段目のそれより小さいときには、2段目の近似減少率は理論値よりも小さい値に収束する。Kroese 他 [6] は最近、異なる方法を使ってこれらの結果を証明している。本論文では、さらに、フィードバックのあるモデルについて同様な結果を証明する。以上のことより、有限打ち切り近似モデルを用いて定常分布の計算をする際に十分な注意を要することが分かった。

関連した研究に Fujimoto 他 [1] がある。そこでは1段目が $PH/PH/c_1$ で待合室に制限なし、2段目が $/PH/c_2$ で待合室に制限なしという直列型待ち行列においてある条件のもとで1,2段目の系内数の定常分布が幾何的に減少することを証明している。本論文のモデルは準出生死滅過程により表すことができる。この過程の定常分布の減少率についての結果が Fujimoto 他 [2] にある。より一般的な確率モデルに対して同様な結果が最近 Miyazawa 他 [3] により得られている。

2. 2ノードのジャクソンネットワーク

初めに図1のような2つのノード1,2からなる待ち行列ネットワークについて考える。以下の仮定をする。ノード1,2の待合室はそれぞれ無限である。ノード1,2における客の到着時刻がそれぞれ率 λ_1, λ_2 のポアソン過程に従う。ノード1において客のサービス時間は平均 μ_1^{-1} の指数分布に従い、サービス終了後に確率 p でノード2に入り、確率 $1-p$ で系の外に出る。ノード2において客のサービス時間は平均 μ_2^{-1} の指数分布に従い、サービス終了後に確率 q でノード1に入り、確率 $1-q$ で系の外に出る。

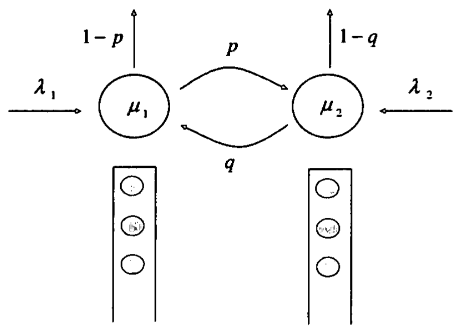

図 1: 2ノードのジャクソンネットワーク

ノード 1,2 の時刻 t における系内数をそれぞれ $L_1(t), L_2(t)$ で表す。ポアソン到着、指数サービスの仮定より $(L_1(t), L_2(t))$ は連続時間型マルコフ連鎖になる。このモデルを2ノードのジャクソンネットワークと呼ぶ。

1段目、2段目における利用率を $\rho_1 = \frac{\lambda_1 + q\lambda_2}{(1-pq)\mu_1}, \rho_2 = \frac{\lambda_2 + p\lambda_1}{(1-pq)\mu_2}$ とする。$\rho_1, \rho_2 < 1$ を仮定する。この条件の下でノード1,2の系内数が n_1, n_2 である定常確率が存在し、これを $\pi(n_1, n_2)$ と表すと、

$$\pi(n_1, n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2}$$

なる積形式で表される。したがってノード2の定常分布の減少率は ρ_2 である。

3. 有限待合室直列型モデル

2ノードのジャクソンネットワークにおいて$p=1,q=0,\lambda_2=0,\lambda_1=\lambda(>0)$とすれば2段直列型の待ち行列になる。1,2段目の利用率はそれぞれ$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1},\rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}$である。このモデルの1段目の系内数を$m$ $(m=1,2,...,\infty)$までに制限し、2段目は制限しないことにする。$m=\infty$のときは制限のないことを意味する。mが有限の場合、1段目の系内数がm人であるとき到着した客はすぐにシステムを立ち去るものとする。このとき時刻tにおける1段目、2段目の系内数をそれぞれ$L_{1(m)}(t),L_{2(m)}(t)$で表す。$L_{2(m)}$を定常状態における2段目の系内数を表す確率変数とし、2段目の分布の減少率を$z_{(m)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P(L_{2(m)}=n+1)}{P(L_{2(m)}=n)}$により定義する。1段目の系内数をバックグラウンド状態、2段目の系内数をレベルとみなす。この連続時間モデルの生成作用素を一様化することにより得られる推移確率行列を$P_{(m)}$とし、レベルにより分割すると$(m+1)\times(m+1)$行列のブロックからなる三重対角構造をもつ。$P_{(m)}$は連続時間モデルと同じ定常分布をもつ。このとき2段目の系内数の分布減少率$z_{(m)}$について以下の結果が示される。

定理 1 $\rho_1,\rho_2<1$を仮定する。1段目の系内数をmに制限する。2段目の系内数の分布減少率$z_{(m)}$は任意のmについて$z_{(m)}\le\rho_2$であり、mについて狭い意味で単調増加である。このとき、

$(1a)$ $\mu_1\ge\mu_2$ならば$z_{(m)}\uparrow\rho_2$ $(m\uparrow\infty)$である。

$(1b)$ $\mu_1<\mu_2$ならば$z_{(m)}\uparrow z_0$ $(m\uparrow\infty)$である。ただしz_0は方程式$z(1-z\mu_2)^2-4\mu_1\lambda=0$の$(0,1)$の解で$z_0<\rho_2$を満たす。

4. 有限待合室直列型フィードバックのあるモデル

2ノードのジャクソンネットワークにおいて$p=1,\lambda_2=0,\lambda_1=\lambda$ (>0)とすると直列型フィードバックのあるモデルになる。1,2段目の利用率はそれぞれ、$\rho_1=\frac{\lambda}{(1-q)\mu_1},\rho_2=\frac{\lambda}{(1-q)\mu_2}$である。1段目の系内数を$m$に制限し、直列型モデルと同様に2段目の系内数の分布減少率$z_{(m)}$について以下の結果が得られる。

定理 2 $\rho_1,\rho_2<1$を仮定する。1段目の系内数をmに制限する。2段目の系内数の分布減少率$z_{(m)}$は任意のmについて$z_{(m)}\le\rho_2$であり、mについて狭い意味で単調増加である。このとき、

$(2a)$ $\mu_1\ge\mu_2$ならば$z_{(m)}\uparrow\rho_2$ $(m\uparrow\infty)$である。

$(2b)$ $\mu_1<\mu_2$かつ$q\le\frac{(1-4\lambda)+\sqrt{(4\lambda-1)^2-8\lambda(\lambda-\mu_2)}}{4\mu_2}$ならば$z_{(m)}\uparrow z_0$ $(m\uparrow\infty)$である。ただし、z_0は方程式$z\{1-z(1-q)\mu_2\}^2-4\mu_1(\lambda+zq\mu_2)=0$の$(0,1)$の解であり$z_0<\rho_2$を満たす。

$(2c)$ $\mu_1<\mu_2$かつ$q>\frac{(1-4\lambda)+\sqrt{(4\lambda-1)^2-8\lambda(\lambda-\mu_2)}}{4\mu_2}$ならば$z_{(m)}\uparrow z_1$ $(m\uparrow\infty)$である。ただし、$z_1=\frac{\mu_1}{q\mu_2+\lambda}\rho_2$である。

5. 2ノードのジャクソンネットワークにおいて$\lambda_2=0$の場合の予想

2ノードのジャクソンネットワークにおいて$\lambda_2=0$とした場合、$\rho_1=\frac{\lambda_1}{(1-pq)\mu_1},\rho_2=\frac{p\lambda_1}{(1-pq)\mu_2}$である。このとき，次の結果が予想される。

定理 3 $\rho_1,\rho_2<1$を仮定する。1段目の系内数をmに制限する。2段目の系内数の分布減少率$z_{(m)}$は任意のmについて$z_{(m)}\le\rho_2$であり、mについて狭い意味で単調増加である。このとき、

$$\frac{\rho_2}{1-\rho_2}\ge p\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\text{または}\lambda_1+q\mu_2=\mu_1$$
$$\Leftrightarrow z_{(\infty)}=\rho_2.$$

参考文献

[1] Fujimoto K., Takahashi Y. and Makimoto N. (1998) J. Oper. Res. Soc. Jpn. 41, 118-141.

[2] Fujimoto K., Takahashi Y. and Makimoto N. (2001) Stochastic Models. 17, 1-24.

[3] Miyazawa M., Zhao Y.Q. (2003) The Stationary Tail Asymptotics in the GI/G/1 Type Queue with Countably Many Background States, preprint.

[4] Neuts M.F. (1981) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[5] Seneta E. (1981) *Nonnegative Matrices and Markov Chains*, Springer-Verlag, New York.

[6] Kroese D.P., Scheinhardt W.R.W.and Taylor P.G. (2003) Spectral Properties of the Tandem Jackson Network, seen as a Quasi-Birth-and-Death Process, preprint.