日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

インプライド正規・NIG分布に基づくファーアウト・オブ・ザ・マネー・オプションの評価

電気通信大学 *野村哲史 NOMURA Satoshi
01605930 電気通信大学 宮﨑浩一 MIYAZAKI Koichi

1. はじめに

今日広く用いられている Black-Scholes モデルでは株式リターンの分布として正規分布を仮定しているが、宮﨑・中尾[2003]では NIG 分布と正規分布を比較し NIG 分布の優位性を報告している。しかしながらその研究では現実のデリバティブ価格情報に基づくものではない。小田・吉羽[1998]では、現実のデリバティブ価格情報からインプライド確率分布を推定する際、パラメータの個数を少数に限定した確率分布モデルによる分析を志向するのが妥当だと示唆している。本稿ではファーアウト・オブ・ザ・マネー・(FOTM)オプションの評価の観点から、現実のデリバティブ価格情報との整合性も踏まえたうえで、デリバティブ評価における正規分布と NIG 分布とを比較する。

2. ヒストリカル確率分布、リスク中立確率分布、インプライド確率分布

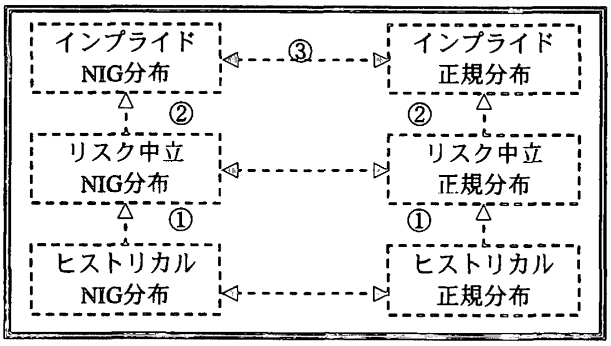

図1 本稿の概念図

デリバティブ評価理論においてはヒストリカル分布ではなく、それをリスク中立変換したリスク中立確率分布を利用しなければならない(①の変換)。本稿では、現実の価格情報をデリバティブの評価に利用する枠組みで議論するため、リスク中立確率分布を更に現実のデリバティブ価格情報と整合性が取れるように変換する(②の変換)。

2-1 オプションの行使価格帯と流動性との関係

大阪証券取引所において取引が開始された1989年6月12日から2003年4月30日までの日経225コール・オプションの取引量を行使価格帯別に見ると、ATM±2000円以内の行使価格を持つコール・オプションの取引量が他の2000円以上 ITM な Deep-In-The-Money オプションや2000円以上 OTM な FOTM オプションに比べて極めて多い。本稿では取引量の極めて少ない行使価格帯は多くの市場参加者が参加したうえで決定された価格とは言いがたく、価格情報としては必ずしも信頼できる情報ではないと考え、取引量の多い ATM 付近の価格情報のみを用いてインプライド確率分布の推定を行なう。

2-2 ヒストリカル確率分布とその推定法

A. 正規分布

株式リターンデータから得られる平均と標準偏差をそれぞれドリフト μ_{normal} と拡散係数 σ の推定値とする。また経過時刻 T 単位における分布関数は、平均が $\mu_{normal}T$、分散が $\sigma^2 T$ である正規分布に従うものとする。

B. NIG 分布

放物型分布を一般型への拡張した分布が次の一般化放物型分布である。

$$gh(x;\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu)=a(\lambda,\alpha,\beta,\delta)\left(\delta^2+(x-\mu)^2\right)^{\frac{1}{2}(\lambda-1/2)} \times K_{\lambda-1/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)e^{\beta(x-\mu)} \tag{1}$$

$$a(\lambda,\alpha,\beta,\delta)=\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-1/2}\delta^{\lambda}K_{\lambda}\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}$$

K_λ：修正Bessel関数 ，$x\in R,\mu\in R$ かつ $\delta>0,|\beta|\le\alpha$

ここで $x_i, i=1,\cdots,n$ は独立なリターンデータであり、特に、$\lambda=-1/2$ に固定したものが NIG 分布である。

2-3 ヒストリカル確率分布からリスク中立確率分布への変換法(①の変換法)

A. 正規分布

ドリフトが μ_{normal}、拡散係数が σ である正規分布に関してリスク中立変換を施すと、リスク中立確率分布のドリフト μ^*_{normal} は次で与えられる。

$$\mu^*_{normal}=(r-q)-\frac{1}{2}\sigma^2 \tag{2}$$

r は無リスク金利、q は配当利回りを表す。

B. NIG 分布

リスク中立エッシャー変換された NIG 分布はリスク中立エッシャー変換パラメータ h^* を用いて以下のようにして得られる。

$$gh^*(x;-\frac{1}{2},\alpha,\beta,\delta,\mu_{nig})=nig\left(x;\alpha,\beta+h^*,\delta,\mu_{nig}\right) \tag{3}$$

2-4 リスク中立確率分布からインプライド確率分布への変換法(②の変換法)

本稿では Rubinstein [1994] の方法に基づいてインプライド確率分布を推定する。リスク中立確率を $P'_j, j=1,\cdots,n$、インプライド確率を P_j とすると以下の数理計画法を解くことによって、インプライド確率分布を推定することができる。ここで r は無リスク金利、q は配当利回り、K_i は行使価格を表し、m は取引されているオプションの数を表している。また S^b, S^a は株式のビッドとアスク、C^b_i, C^a_i はコール・

オプションのビッドとアスクを表している。

$$\min_{P_j} \sum_j (P_j - P'_j)^2$$
$$\text{s.t} \begin{cases} \sum_j P_j = 1 \ , P_j \geq 0 \quad , j = 0, \cdots, n \\ S^b \leq S \leq S^a \quad S = \dfrac{\left(q^* \sum_j P_j S_j\right)}{r^*} \\ C_i^b \leq C_i \leq C_i^a \quad C_i = \dfrac{\left(\sum_j P_j \max[0, S_j - K_i]\right)}{r^*} \quad , i = 1, \cdots, m \end{cases} \tag{4}$$

3. 実証分析

3-1 データ

ヒストリカル確率分布のパラメータ推定には、1993 年以降の月次株価データを用いた。ヒストリカル確率分布からリスク中立確率分布への変換を行なうために用いた金利は満期までの日本円TIBORを区分近似したものを利用した。実証分析の対象となるコール・オプションの価格情報としては、2003 年 5 月 1 日以降の 2003 年 7 月限月と 2003 年 8 月限月の日経 225 コール・オプションの全ての行使価格帯に関する日次の価格データを用いる。

3-2 ヒストリカル確率分布からリスク中立確率分布へ

ヒストリカル確率分布からリスク中立確率分布へ変換することにより金利水準とオプション満期までの時間に関して統計量がどのように変化するかを数値例により分析し、正規分布の場合と NIG 分布の場合とを比較する。

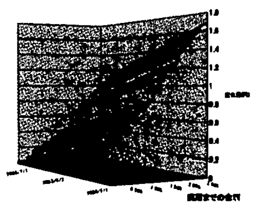

図 2 リスク中立変換による平均の変化量の差
(リスク中立正規平均－リスク中立 NIG 平均)

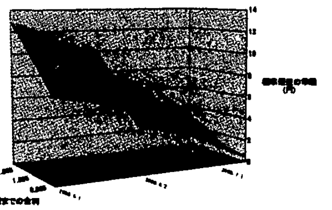

図 3 リスク中立変換による NIG 分布の標準偏差の変化
(リスク中立 NIG 標準偏差－ヒストリカル NIG 標準偏差)

ヒストリカル確率分布からリスク中立確率分布へ変換を施すことによって正規分布は平均のみが変化するが、NIG 分布では平均だけではなく標準偏差、歪度、尖度も柔軟に変化し分布形全体で変化が大きい。NIG 分布と正規分布とを比較すると、NIG 分布は高い尖度と歪度を有している。金利への影響という観点から見ると、NIG、正規分布ともに金利が高いほど平均の変化量は大きい。NIG 分布では全ての統計量が金利への影響を受けて変化するため、金利の変動に応じて柔軟に変化するものと考えられる。

3-3 リスク中立確率分布からインプライド確率分布へ

<インプライド確率分布について>

採用するリスク中立確率分布の違いによってインプライド確率分布には差が生じる。ATM 付近では正規分布と NIG 分布のインプライド確率における差は小さいが、ファーアウト部分においては相応の差が生じた。

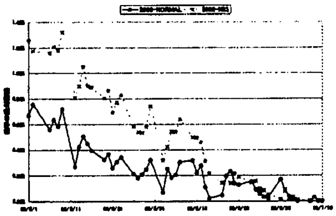

図 4 2000 円以上 FOTM でのインプライド確率分布とリスク中立確率分布との確率の絶対偏差

<FOTM オプションの評価について>

行使価格が 2000 円 FOTM、2500 円 FOTM の何れの場合においても僅かな例外点を除いては、インプライド NIG 分布に基づいて算出したオプション価格の方が、インプライド正規分布に基づいて算出したオプション価格よりも現実のオプション価格に近いことがわかる。特に、この傾向は満期までの時間が短くなる場合に顕著に表れる。正規分布では尖度が低いため、満期までの時間が短くなると ATM 付近で確率の調整を行なわなければならず、ATM 付近のオプション価格が制約を満たすよう確率を調整するのに FOTM に確率を残してしまい、FOTM オプションを割高に評価してしまう。NIG 分布では満期が近づくと尖度が高くなり ATM での確率の調整が少ないため、FOTM オプションに ATM 付近の価格情報が伝わり適切に評価を行なうことができる。

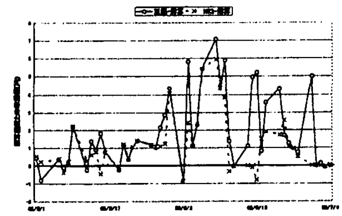

図 5 2000 円 FOTM オプションの清算値段との乖離額

4. まとめ

①の変換において正規分布では平均のみが移動するのに対し、NIG 分布では全ての統計量が柔軟に変化することが可能となった。この柔軟性の違いのため、ATM 付近のオプション価格情報に基づいて変換②を施したときに、ファーアウト部分における両者のインプライド確率に乖離が確認された。リスク中立 NIG 分布を用いたオプション評価モデルの方がATM付近のオプション市場価格をモデルに適切に反映させることができ、FOTM オプションの評価において重要な役割を果たすことがわかった。

参考文献

- 宮﨑浩一・中尾司[2003],「"正規分布と NIG 分布", "日次と週次" 日本株式市場におけるリスク管理とオプション評価」『ジャフィー・ジャーナル 2003：金融工学と資本市場の計量分析』149-183.
- 小田信之・吉羽要直[1998],「デリバティブ商品価格から導出可能な市場情報を利用したマーケット分析方法」『金融研究』第 17 巻第 2 号.