日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

平均分散分析でリスクフリーなポートフォリオが存在する条件について

01504364 近畿大学経営学部 林 芳男 HAYASHI Yoshio

(本文)Markowitzのポートフォリオ分析理論は二銘柄の場合は簡単である。収益率の平均、分散の対が(μ_X, σ_X^2)と(μ_Y, σ_Y^2)で与えられる二銘柄X, Yをそれぞれ比率$p : 1-p$で混合して作ったポートフォリオPの平均μ_Pと標準偏差σ_Pの間の完全な関係の解析で難しい数学の問題は現れない。定義から明らかに

$$\mu_P = p\mu_X + (1-p)\mu_Y \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= p^2\sigma_X^2 + 2p(1-p)\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + (1-p)^2\sigma_Y^2 \\ &= (\sigma_X^2 - 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2)p^2 + 2(\rho_{XY}\sigma_X - \sigma_Y)\sigma_Y p + \sigma_Y^2\end{aligned} \tag{1.2}$$

となる。ただし、$0 \leqq p \leqq 1$でその二銘柄間の相関係数ρ_{XY}も観察から与えられるパラメータである。(1.1)からpを求め(1.2)に代入することでμ_Pとσ_Pの関係が決まる。(1.2)式を最小にする混合比率pを求めることがその課題であるがその解析の過程で$\sigma_P^2 = 0$なるポートフォリオ、つまり、安全な資産が存在する場合があることが分かる。結果だけをここに書くと：$\rho_{XY} \neq 1$又は$\sigma_X \neq \sigma_Y$のときで$\rho_{XY} = -1 \Rightarrow$安全な比率$p^* = \sigma_Y / (\sigma_X + \sigma_Y)$が存在する。

一般の$n\ (> 2)$銘柄の場合に安全なポートフォリオを形成できることがあるのかという問題について考える。1からnの番号で識別される銘柄の収益率の(平均,分散)の組が(μ_j, σ_j^2) $(j = 1, \cdots, n)$でそれらの分散･共分散行列は$Q = (q_{ij})$と与えられているとする。つまり、$q_{ij} = Cov(X_i, X_j)$でX_jは銘柄jの収益率を表す確率変数である。言うまでもなく$q_{jj} = \sigma_j^2$である$(j = 1, \cdots, n)$。これらの銘柄のポートフォリォPを賢く組んで平均が同じであるならばリスク(=分散)が最小である効率的なものを求めたいというのがマコービッツ(Markowitz)のアイデアである。それらの銘柄の組み入れ比率のベクトルが$\boldsymbol{x} = (x_j)$(列方向の確率ベクトル)で与えられるポートフォリォをP$(\boldsymbol{x})$で表し、ポートフォリォP$(\boldsymbol{x})$の平均値を$\mu_{\boldsymbol{x}}$,標準偏差を$\sigma_{\boldsymbol{x}}$で表すと

$$\mu_{\boldsymbol{x}} = E(\Sigma_j x_j X_j) = \Sigma_j x_j E(X_j) = \mu^T \boldsymbol{x} \quad (\text{但し、}\mu = (\mu_j)\ (\text{列ベクトル}))$$

$$\sigma_{\boldsymbol{x}}^2 = E(\Sigma_j x_j X_j)^2 - E^2(\Sigma_j x_j X_j) = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x}$$

となる。効率的なポートフォリオ(efficient portfolio) $\boldsymbol{x}$とは与えられた収益率μを持つポートフォリオの中で分散が最小なものを指す。そのn個の銘柄すべてに危険性があり、つまり、どの$j = 1, 2, \cdots, n$に対しても$\sigma_j^2 > 0$でどの銘柄も他の銘柄の一次結合で表現できない場合は分散･共分散行列Qが正則な場合である。安全資産が存在する場合は対応するQの列ベクトルと行ベクトルが零ベクトルである場合である。この二つの場合の完全な解析はMerton(1972)に与えられている。単一銘柄で安全なものがないときで安全なポートフォリオを形成できるときはどういうときであるかという問題は数学の問題としては

$$Q\boldsymbol{x} = 0,\ 1^T\boldsymbol{x} = 1,\ \boldsymbol{x} \geqq 0$$

という問題になる(空売り禁止条件が無い場合は$\boldsymbol{x} \geqq 0$という条件は外しても良い)。これは、勿論、Qが正則でない場合しか解を持たない。

$Q = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^T & \alpha \end{pmatrix}$の形に書くことができる。先ず、$rank(Q) = n-1$のとき、つまり、最初の$(n-1)$銘柄の分散･共分散行列が正則なときを考える。その$n$銘柄への配分を$(\boldsymbol{x}^T, y)$で表す。そのポートフォリォの分散は

$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, y)\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, y)\begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} + y\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + y\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{x} + y\boldsymbol{a}) + y(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + y\alpha) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} + 2y\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} + \alpha y^2$$

である。これが非負定値であるための必要十分条件は

$$\alpha \geqq \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{a} \qquad (4.3)$$

である。

さて、リスクが 0 である配分が求めたいのであるから

$$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

つまり、

$$A\boldsymbol{x} + y\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (4.4)$$

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \alpha y = 0 \qquad (4.5)$$

という連立方程式を解かなければならない。そういう解 $(\boldsymbol{x}, y)$ の内で

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + y = 1,\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0},\ y \geqq 0 \qquad (4.6)$$

なるものを求めたい。(4.4) より

$$\boldsymbol{x} = -yA^{-1}\boldsymbol{a} \qquad (4.7)$$

である。これを (4.5) に代入して

$$(\alpha - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{a})\,y = 0 \qquad (4.8)$$

を得る。したがって、$\alpha > \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{a}$ のとき $y = 0$ となり (4.7) から $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるのであるからリスクの無い配分は存在しない。$\alpha = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{a}$ のとき y は任意で良い。$A^{-1}\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{0}$ のとき (4.6), (4.7) を満足する正数 y が一意に定まる。その y に対する (4.7) の $\boldsymbol{x}$ がリスクフリーな配分である。そうでない場合はリスクの無い配分は存在しない。

次は A が正則とは限らない場合を考える。$\alpha = 0$ であるとするとこれは第 n 番目の資産が安全な場合で分散・共分散行列の性質から $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限るから、$\alpha > 0$ の場合を考えれば良い。(4.5) より

$$y = -\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}/\alpha$$

(4.9)

これを (4.4) に代入して

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{a}/\alpha = \boldsymbol{0}$$

$$(A - \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}/\alpha)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad (4.10)$$

もし $(A - \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}/\alpha)$ が正則となれば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が唯一のその解となり (4.9) により $y = 0$ となるからこの場合はリスクフリーな配分は存在しない。$(A - \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}/\alpha)$ が正則でない場合、(4.10) の自明でない解 $\boldsymbol{x}$ で $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < 0$ なるものが存在しない時はやはりリスクフリーな配分は存在しない。そのような解が存在する場合、(4.6) の条件で標準化することによりリスクフリーな配分を得ることができる。

以上の理論を $n = 3$ 銘柄で分散・共分散行列 Q が正則でない場合に応用するならば完全な解を得ることができる。$A - \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}/\alpha$ の形の行列の正則性の判定が簡単にできるならば一般の場合の安全資産の存在条件を示すこともできる。詳しくは会場で発表します。

参考文献：R. C. Merton, "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier," Journal of Financial and Quantitative Analysis, September 1972, pp. 1851-1872.