日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

A conditional independence approach for portfolio risk evaluation

01606410　京都大学大学院経済学研究科　室町幸雄　MUROMACHI Yukio

1　はじめに

金融機関にとって，自社の抱えるポートフォリオのリスク計測はBIS規制や金融庁検査に対応するためだけでなく，経営戦略策定上も非常に重要である．これまで多くのリスク計測モデルが提案されてきたが，それらは，ポートフォリオの将来価格（または損失額）の分布をモンテカルロ・シミュレーションにより算出するシミュレーション法，あるいは解析的な計算により算出する解析法に大別される．解析法の計算負荷は軽いが，厳しい仮定が必要である．一方，シミュレーション法の計算負荷は重いが，柔軟な作り込みが可能なので，実務では好まれている．ところが最近，シミュレーション法によるリスク量の推定値は意外に不安定であることが指摘された．さらに，ポートフォリオ全体のリスク量（VaRやCVaR）に対する各資産の寄与（リスク寄与度）の推定値も不安定であるという．

本講演では，シミュレーション法と解析法を混合したリスク計測手法（ハイブリッド法）を提案する．この手法による推定値は，解析法と同様に非常に安定する．また，若干の工夫により，膨大なシナリオ数のシミュレーションと同程度の精度の結果を，ごく少数のシナリオから得ることができる．さらに，シミュレーション法のように柔軟な作り込みも可能である．

2　設定

現在時刻を$t=0$，リスク計測時点を$t=T>0$として，n個の資産からなるポートフォリオを考える．資産jの保有量を定数a_j，時刻Tにおける資産jの単位量あたりの価格を$X_j(T)$とすると，時刻Tにおけるポートフォリオの価格は$X(T)=\sum_{j=1}^{n}a_jX_j(T)$である．また，資産$j, j=1,\cdots,n,$のデフォルト時刻を$\tau_j$とする．

シミュレーション法では時刻Tまでの各種変数（金利期間構造，株価，為替レートなど）の推移および各資産のデフォルト／非デフォルト状態を記述したシナリオを多数発生させるが，ハイブリッド法ではそのシナリオを，時刻Tにおける全保有資産のデフォルト／非デフォルト状態の部分（デフォルトシナリオ）とそれ以外の部分（基礎変数シナリオ）に二分する．さらに，デフォルトは条件付独立（基礎変数シナリオが具体的に与えられたとき，各資産のデフォルトは独立に発生すること）を仮定する．

基礎変数を記述する確率空間を$(\Omega,\mathcal{G},\mathcal{P})$，時刻$t$における$m$次元基礎変数ベクトルを$\mathbb{W}(t)$とすると，$\mathcal{G}=(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$は$\mathbb{W}(t)$から生成されるフィルトレーションである．$\mathcal{G}_T$が与えられたとき，時刻$T$における資産$j$の条件付生存確率$S_j(T|\mathcal{G}_T)=P\{\tau_j>T|\mathcal{G}_T\}$や，条件付価格

$$X_j(T|\mathcal{G}_T)=\begin{cases}X_j^{nd}(T|\mathcal{G}_T), & \text{if} \quad \tau_j>T,\\ X_j^{d}(T|\mathcal{G}_T), & \text{if} \quad \tau_j\leq T,\end{cases}$$

は既知とする．デフォルト時刻τ_jは未知である．

3　ハイブリッド法

まず，$\mathcal{G}_T$が与えられたときの条件付分布を導出する．ただし，条件付分布を与える数式の中では条件$(\cdot|\mathcal{G}_T)$を省略する．

$\mathcal{G}_T$ が与えられたとき，$X(T)$ の条件付モーメント母関数は

$$M_X(s) = \prod_{j=1}^{n} \left\{ S_j(T) e^{sa_j X_j^{nd}(T)} + (1 - S_j(T)) e^{sa_j X_j^d(T)} \right\}$$

と書ける．この $M_X(s)$ を逆ラプラス変換すれば，密度関数 $f_X(u)$ が得られる；

$$f_X(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i_\infty}^{\sigma + i_\infty} M_X(s) e^{-us} ds. \quad (1)$$

ただし，σ は実数である．(1) の積分を鞍点法で近似して，エッジワース展開の低次の項を残すと，

$$f_X(u) \simeq \frac{e^{K_X(\bar{s}) - \bar{s}u}}{\sqrt{2\pi K_X^{(2)}(\bar{s})}} \left[1 + \frac{\lambda_{(4)}(\bar{s})}{8} - \frac{5\lambda_{(3)}^2(\bar{s})}{24} \right] \quad (2)$$

が得られる．ただし，$K_X(s)$ は条件付キュムラント母関数，$K_X^{(n)}(s) \equiv d^n K_X(s)/ds^n$，$\lambda_{(n)}(s) \equiv K_X^{(n)}(s)/(K_X^{(2)}(s))^{n/2}$ で，$\bar{s}$ は鞍点（$K'_X(s) - u = 0$ の解）である．これとほぼ同様の手法により，$u < E[X(T)]$ に対する分布関数の近似式

$$F_X(u) \simeq e^{K_X(\bar{s}) - \bar{s}u + \frac{1}{2}\hat{z}^2} \times \left\{ (1 - \Phi(\hat{z})) \left(1 + \frac{\lambda_{(3)} \hat{z}^3}{6} \right) - \phi(\hat{z}) \frac{\lambda_{(3)}(\hat{z}^2 - 1)}{6} \right\} \quad (3)$$

が得られる．ただし，$\Phi(\cdot)$ と $\phi(\cdot)$ はそれぞれ標準正規分布の分布関数と密度関数，$\hat{z} \equiv \bar{s}\sqrt{K_X^{(2)}(\bar{s})}$ で，$\lambda_{(n)}$ の引数 $\bar{s}$ は省略した．より高次の近似式は Muromachi [1] を参照．さらに，$CTE_X(u) \equiv E[X(T)|X(T) \leq u]$ を定義すると，関数 $h(u) \equiv uf_X(u)/E[X(T)]$ を密度関数とする確率測度の下における $X(T)$ の分布関数 $F_h(u)$ を用いて，

$$CTE_X(u) = \frac{E[X(T)]}{P\{X(T) \leq u\}} F_h(u) \quad (4)$$

と書けるので，(4) の $F_h(u)$ に (3) を適用すれば $CTE_X(u)$ の近似式が得られる．$X(T)$ の $100\alpha\%$ 点を $A_X(\alpha)$ とすると，信頼水準 $100\alpha\%$ の期待ショートフォールは $ES_X(A_X(\alpha))$ で与えられる．

上述の条件付分布に期待値の chain rule を適用すれば無条件分布が得られる．例えば，密度関数は $f_X(u) = E[f_X(u|\mathcal{G}_T)]$，分布関数は $F_X(u) = E[F_X(u|\mathcal{G}_T)]$ で与えられる．したがって，この手法による分布関数の近似値を求める手順は，

1. 基礎変数シナリオをモンテカルロ・シミュレーションで多数発生させる．
2. それぞれの基礎変数シナリオに対する条件付分布関数を (3) より求める．
3. 条件付分布関数の期待値を求める．

である．条件付分布が解析的に与えられるので，推定値は非常に安定する．また，手順 1 のシミュレーション部分は柔軟な作り込みが可能である．

4 リスク寄与度

ポートフォリオ全体のリスク量を R_p とすると，$RC_j \equiv a_j \frac{\partial R_p}{\partial a_j}$ で定義される量は R_p に対する資産 j の寄与を示すと考えられるので，ここでは RC_j をリスク寄与度と呼ぶ．R_p がある条件を満たすとき，リスク寄与度は $\sum_{j=1}^n RC_j = R_p$ という望ましい性質を持つことが知られている．

リスク寄与度のハイブリッド法による推定値は，解析的な計算に基づくので非常に安定する．VaR や CVaR に対するリスク寄与度を与える具体的な式は，Muromachi [1] を参照されたい．

講演では，分布関数やリスク寄与度のハイブリッド法による推定結果を具体的に示す．

謝辞　本稿作成にあたり，指導教官の木島正明教授には大変貴重なコメントを頂いた．この場を借りて謝意を表したい．

参考文献

[1] Muromachi Y., "A conditional independence approach for portfolio risk evaluation," *in preparation.*