

## 二基準型 DEA ゲームにおける均衡解

01405480 政策研究大学院大学 \*中林 健 NAKABAYASHI Ken  
01302170 政策研究大学院大学 刀根 薫 TONE Kaoru

## 1. はじめに

組織の中で発生する費用の過不足分を関係部署の間で配分・分担しなければならない場合に、どのように割り当てを決定すればよいかという問題が、しばしば起こる。仮に組織全体のパフォーマンスが最大になるような配分が望ましいとしても、実際の問題では、その基準を一義的に定めることが困難なケースがある。また、「効率性」とは異なる「公平性」の観点に立った基準設定を必要とするようなケースも少なくない。こうして基準項目が複数に渡る場合、その間の優先度をどのように決定すればよいかという問題が新たに生じてくる。すなわち、具体的に配分を決定するためには、基準項目間のウェイト付けの適切性について関係者の間で合意を形成しなければならない。

このような多基準型の評価が絡む配分・分担問題に対して、著者らは、DEA (Data Envelopment Analysis) と協力ゲーム理論を利用した「DEA ゲーム」を構築し、配分決定について新たな側面から考察できる理論的フレームワークを提示してきた [1-3]。今回の発表では、基準項目の数を2個に限定したときのDEAゲームの特徴について報告し、その後、IFORS (International Federation of Operational Research Societies) の分担金問題への適用事例を紹介する。二基準型DEAゲームにおいては、シャープレイ値として算出されるゲームの解が、各々の基準項目に基づく二案を「足して二で割る」解になることが確認された。しかしながら、基準項目数が3個以上のときには、必ずしもそのようにならない。

## 2. DEA ゲーム

プレイヤー  $k$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) の基準  $i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) における評価値を  $x_{ik}$  と置く。 $x_{ik}$  の値に比例して各プレイヤーの分担率を定めるような費用分担問題を設定するとき、利己的なプレイヤーが合理的に考えるならば、プレイヤーは複数の基準の中から自己の分担率が最小になる都合の良い基準を指向することになる。このようなプレイヤー  $k$  の利己的なウェイト選択は、DEA の可変ウェイトの表記法と Charnes - Cooper 変換を用いて次の最小化問題(1)で表すことができる。ここで、 $w_i$  は基準  $i$  に付されるウェイト

を表している。

$$d(k) = \min_{w_i} \sum_{i=1}^m w_i x_{ik} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m w_i x_{ij} \right) = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad (\forall i)$$

このとき、 $\sum_{j=1}^n d(j) \leq 1$  が成立し、ほとんどのケースにお

いてプレイヤーが支払っても良いと考える額を総計しても必要とされる額に到達しないことが確認される。このことは、評価基準の相違から発生する社会的ジレンマの存在を理論的に表現している。すなわち、全てのプレイヤーは目的を等しくする組織体に所属しているにも関わらず、個別に異なる評価基準を設定してしまうことにより、ジレンマ的状况に陥るのである。そこで、プレイヤー間に理論上の「統合」を想定してみる。

任意の統合  $S \in N = \{1, \dots, n\}$  を提携プレイヤーと見なして、その特性関数値  $d(S)$  を次の最小化問題により与えれば、本研究における提携形ゲーム——DEA  $\min$  ゲーム  $(N, d)$  が定義される (制約式は(1)と同じで省略する)。

$$d(S) = \min_{w_i} \sum_{k \in S} \left( \sum_{i=1}^m w_i x_{ik} \right) \quad (2)$$

ゲーム  $(N, d)$  は優加法的性質を満たし、さらに全体提携の特性関数値  $d(N)$  が 1 になることを確認できる。このDEAゲームを利用して、シャープレイ値や仁などの協力ゲームの解として分担率を決定することが可能となる。

特に本研究では、全てのプレイヤーは同じ組織体に所属しており、分担率の決定は組織を統括する管理者に一任されるような問題を想定している。実際にプレイヤー間の統合がなくとも、決定を託された管理者が「統合」の規範的考えを必要として、理論の上で考察してみることは特に問題ないものとする。もしくは、管理者が「各プレイヤーにとって最悪の基準により分担率を評価する」と決定を下すと考えてみても良い。この場合には、以下の最大化問題(3)によりDEA  $\max$  ゲーム  $(N, c)$  が定義され (制約式は(1)と同じ)、劣加法的性質を満たすことから、プレイヤー間に「提携」が成立するとの解釈が可能となる。

$$c(S) = \max_{w_i} \sum_{k \in S} \left( \sum_{i=1}^m w_i x_{ik} \right). \quad (3)$$

DEA ゲームの特徴的な性質の一つとして、任意の提携  $S$  に対して特性関数  $c(\cdot)$  と  $d(\cdot)$  は次の等式を満足する。

$$c(S) + d(N - S) = 1. \quad (4)$$

$\max$  ゲーム  $(N, c)$  と  $\min$  ゲーム  $(N, d)$  は互いが互いの *Dual Game* であり、二種類のゲームのシャープレイ値は完全に一致する。すなわち、任意のプレイヤー  $k$  に対して次の等式が成立する。

$$\phi_k(c) = \phi_k(d). \quad (5)$$

### 3. 二基準型の問題

**補題 1** 基準項目数  $m$  が 2 である DEA ゲームにおいて、互いに交わらない任意の提携  $S$  と  $T$  に対して次の等式が成立する。

$$c(S \cup T) + d(S \cap T) = c(S) + c(T) + d(S) + d(T). \quad (6)$$

補題 1 を利用して、任意の提携  $S$  について特性関数値を以下のように分解できる。

$$c(S) + d(S) = \sum_{j \in S} c(j) + \sum_{j \in S} d(j). \quad (7)$$

等式(5)と(7)を利用して、次の定理が得られる。

**定理 1**  $m = 2$  である DEA ゲームにおいて、任意のプレイヤー  $k$  のシャープレイ値  $\phi_k(c)$  及び  $\phi_k(d)$  を次のように書ける。

$$\phi_k(c) = \phi_k(d) = \frac{c(k) + d(k)}{2}. \quad (8)$$

$m=3$  のときに定理 1 を必ずしも満たさないことは、反例をもって示される。

### 4. ケース・スタディ

50ヶ国近くの OR 学会が集まって構成している IFORS の運営費は、参加国の拠出金によって賄われており、各学会の会員数に応じて各国の分担金が定められている。しかし考えてみれば、所得の低い国のメンバーが裕福なメンバーと全く同じ金額を負担することは必ずしも公平であるとは言い難い。発展途上国の側から不満が出てもおかしくない話である。特に IFORS は途上国における OR の浸透に力を注いできており、その意味でも何らかの配慮を示すことは重要である。そこで、新たに平均所得額を基準に加え、国際連合が監修したデータを用いて、DEA ゲームによるシャープレイ値を算出してみた。評価結果につい

ては、当日の発表の中で提示することとしたい。

### 5. まとめ

「足して二で割る」の言葉は、日本型の政治的解決の比喩として、特に最近では、批判的に用いられることが多い。例えば、「方法が安易すぎて何の哲学もない」と結論付けるものがある。これに対して、本研究では、OR の代表的手法である DEA と協力ゲーム理論を利用し、あらゆる提携を考慮した上で算出した均衡解が、「足して二で割る」解と一致することを理論的に示せた。「足して二で割る」は一見安易な方法に見えるが、そのじつ極めて合理的な解決法であるとも見ることが出来る。

全く異なる批判として、「双方に不満が残る」と主張するものもある。しかし逆に、世の中全ての問題が不満ゼロで解決できると考えることは現実的でないように思われる。そして、見方を違えれば、「足して二で割る」は「双方がそれなりに満足できる」方法でもある。

さらに、批判の中には「白黒はつきりつける方が望ましい」と主張するものがあり、他にも同様のニュアンスを含むものが多い。本研究において、何でもかんでも安易に「足して二で割る」ことが何にも増して望ましいなどと言うつもりは全くない。政策論争を経て、共有すべき目標の方向付けを行わなければならない問題は確かに存在するのであろう。DEA ゲームの適用に関して言えば、「領域限定法」などのアプローチを含めて考慮される必要がある。

### 参考文献

- [1] 中林健、刀根薫、Sahoo, B.K., (2003): 可変ウェイトと提携形ゲームを用いた費用分担決定法、日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集、pp. 212-213.
- [2] Nakabayashi, K. and Tone, K., (2003): "Egoist's Dilemma: A DEA Game," *GRIPS Research Report Series 1-2003-0002*.
- [3] Nakabayashi, K. and Tone, K., (2003): "Mathematical Properties of a DEA Game," 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集、pp. 248-249.
- [4] Cooper, W.W., Seiford, L.M., and Tone, K., (1999): *Data Envelopment Analysis — A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publisher.
- [5] 岡田章 (1996): 『ゲーム理論』有斐閣。