

一対比較デザイングラフにおける 評価フローと価値ポテンシャル

01205220 日本大学生産工学部 † 篠原 正明
Nihon University Shinohara Masaaki

1 はじめに

比率モデルを仮定した一対比較デザイングラフにおいて、評価対象となる項目のウェイトをLLSで推定する前提で、対数項目ウェイトを価値ポテンシャル、対数一対比較値を評価フローととらえる。評価フローは価値ポテンシャルの差から生じる点を説明する数理モデル式を提案する。さらに、トポロジー公式にもとづく項目ウェイトの陽表現式、ならびに、固有ベクトル法によるトポロジー公式上の解釈の比較について考察する。

2 比率モデルと対数線形モデル

無向グラフであるデザイングラフ $G(V, E)$ において、以下の式が成立する。

$$a_{ij} = \frac{x_i}{x_j} e_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (1)$$

$$\alpha_{ij} = u_i - u_j + \epsilon_{ij} \quad (i, j) \in E \quad (2)$$

但し、 a_{ij} は項目 i の項目 j を基準とした一対比較値、 x_i は項目 i のウェイト、 e_{ij} は乗法系誤差、 $\alpha_{ij} = \log a_{ij}$ 、 $u_i = \log x_i$ 、 $\epsilon_{ij} = \log e_{ij}$ である。

3 制約付き LLS

$$Z = \sum (\epsilon_{ij})^2 \rightarrow \text{最小化} \quad (3)$$

$$\text{制約条件: } \sum u_i = K \quad (\text{適当な定数}) \quad (4)$$

但し、(3) 式で総和は $(i, j) \in E$ についてである。又、(4) 式で通常は $K = 0$ として議論を進めているが、厳密な議論を行うため、あえて K (適当な定数) とした。又、以下の議論では逆比性 ($a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$, $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$) を仮定する。

4 制約付き LLS の最適性条件

$L(u, \lambda) = Z(u) - \lambda(\sum u_i - K)$ ラグランジュ関数 $L(u, \lambda)$ を構成し、 u, λ についての偏微分 = 0 とした最適性の必要条件により、任意のデザイングラフ $G(V, E)$ について、以下の性質が成立する。

[性質 1] 制約条件 $\sum u_i = K$ に対する乗数 λ は 0 である。

$$L(u, \lambda) = Z(u) - \lambda(\sum u_i - K) \quad (5)$$

[性質 2] 節点 $i \in V$ について、が成立する。

$$\sum_{j \in S(i)} \alpha_{ij} = \sum_{j \in S(i)} (u_i - u_j) \quad (6)$$

但し、 $S(i)$ は節点 i の隣接節点集合である。

5 評価フローと価値ポテンシャル

[性質 2] の (6) 式の左辺は、項目 i から隣接項目 $S(i)$ へ流出する評価フローの総和を、右辺は、項目 i と隣接項目の価値ポテンシャルの差の総和と、解釈できる (図 1)。すなわち、 (i, j) 間の抵抗 R_{ij} を仮定した Ohm の法則

$$R_{ij} \alpha_{ij} = (u_i - u_j) \quad (7)$$

において、 $R_{ij} = 1$ の場合に相当する [1]。

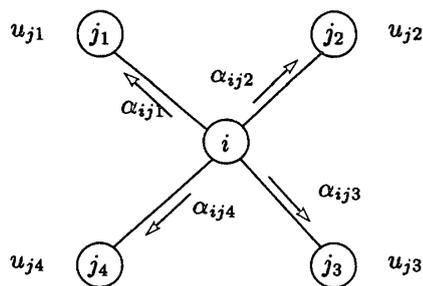


図 1: 節点 i での評価フロー $\{\alpha_{ij1}, \alpha_{ij2}, \alpha_{ij3}, \alpha_{ij4}\}$ と価値ポテンシャル $\{u_i, u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}, u_{j4}\}$ の関係

6 カットセットにおける評価フローと価値ポテンシャル

デザイングラフにおける任意のカットセットを $C_1(V_1, V - V_1)$ としよう. C_1 を節点 i が V_1 , 節点 j が $V - V_1$ に属する枝集合とすると, 次式が成立する.

[性質 3] カットセットでの Ohm 則

$$\sum_{(i,j) \in C_1} \alpha_{ij} = \sum_{(i,j) \in C_1} (u_i - u_j) \quad (8)$$

[例 1] 図 2 に示すデザイングラフにおいて, $V_1 = \{1, 4\}$ とすると, $C_1 = \{(1, 2), (1, 3), (4, 3)\}$ となり, 次式を得る.

$$\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{43} = (u_1 - u_2) + (u_1 - u_3) + (u_4 - u_3) \quad (9)$$

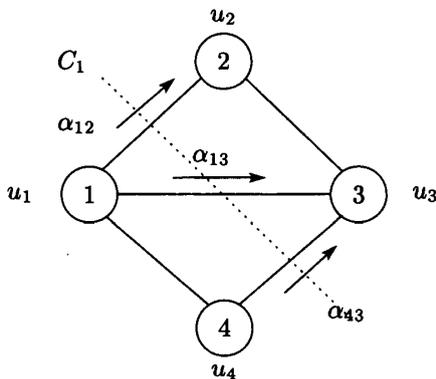


図 2: カットセットでの Ohm 則

7 LLS 解のトポロジー公式

例えば, 図 2 に示す不完全デザイングラフにおいては, LLS 解として各項目のウェイトは次式で陽解を得る.

$$x_1 = (a_{11} a_{12} a_{13} a_{14})^{\frac{1}{4}} \quad (10)$$

$$x_2 = (a_{21} a_{22} a_{23} A_{24})^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

$$A_{24} = (a_{21} a_{14})^{\frac{1}{2}} (a_{23} a_{34})^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$x_3 = (a_{31} a_{32} a_{33} a_{34})^{\frac{1}{4}} \quad (13)$$

$$x_4 = (a_{41} A_{42} a_{43} a_{44})^{\frac{1}{4}} \quad (14)$$

$$A_{42} = (a_{41} a_{12})^{\frac{1}{2}} (a_{43} a_{32})^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

項目 1 と 3 のウェイト x_1, x_3 は幾何平均であるが, 項目 2 のウェイト x_2 は, 存在しない a_{24} のかわりに項目 1 経由の $a_{21} a_{14}$ と項目 2 経由の $a_{23} a_{34}$ を幾何平均した A_{24} を用いて, $a_{21}, a_{22} (= 1), a_{23}, A_{24}$ の幾何平均をとるという意味を持つ. 項目 4 のウェイト x_4 も同様である (但し x_i は正規化前).

8 固有ベクトル法のトポロジー公式

固有ベクトル法においては, 項目 i のウェイトは, 全項目からの注目する項目への全ステップにおよぶ評価推移値総和というトポロジー的意味を持っている. 例えば, 項目 2 について言えば, 1 ステップの効果は $a_{21} + a_{23}$, 2 ステップの効果は $a_{23} a_{31} + a_{21} a_{13} + a_{21} a_{14} + a_{23} a_{34}, \dots$ と続く. (11) 式と対比すると, $a_{21}, a_{23}, a_{21} a_{14}, a_{23} a_{34}$ などは共通しているが, LLS 解ではこれらの幾何平均が, 固有ベクトル法では加算ゆえに算術平均的傾向を持つと考えられないだろうか.

9 おわりに

一般の不完全デザイングラフにおける LLS による項目ウェイト推定に関して, 評価フローと価値ポテンシャルの概念を導入した理論枠組を提案し, 「抵抗」が評価者パラメータに対応することを示した. さらに, 不完全情報下における幾何平均法のトポロジー公式解釈を与え, 固有ベクトル法のトポロジー公式上の解釈と比較した. トポロジー公式の確立, パス代数上の考察, フローとポテンシャルの理論枠組の発展などは今後の課題である.

参考文献

- [1] 三宅 千香子, 篠原 正明: 「複数評価者不完全一対比較情報下におけるウェイト推定法」, 2002 年度日本オペレーションズリサーチ学会秋季研究発表会論文集, pp.14 - 15. (2002)
- [2] 篠原 正明: 「マルコフ連鎖における基本閉路確率フローのまとめと展開」, 日本大学生産工第 34 回学術講演会論文集, pp.59 - 62. (2001.12)