日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

多制約分離形離散最適化問題のための近似解法

01402374 関西大学 *仲川 勇二 NAKAGAWA Yuji
University of Centerbury Ross J.W. James
関西大学大学院 大西 準一 ONISHI Junichi

1 はじめに

代理制約法は，複数の制約条件式を持つ原問題を代理乗数を用いて単一制約の代理問題からなる代理双対問題へ変換し，この双対問題を解くことで原問題の最適解を求めようとする方法である[3]．しかし多くの離散最適化問題では，代理双対問題に双対ギャップ(duality gap)が存在することが多く，代理制約法では厳密解を求めることが困難であると考えられていた[5]．そのため仲川 [9],[10]は標的(標的に当たった解を列挙する)問題を解くことで代理双対ギャップを閉じ，原問題の厳密解を求めることができる改良代理制約法(ISC法)を提案した．この解法により，極めて大規模な多制約非線形ナップザック問題も厳密解を求めることが可能になった．本論文で提案する近似解法は，ISC 法の変形で，標的値を大きくし解空間を狭めることで計算時間を減らす試みを行っている．本近似解法は，計算実験より解の品質をあまり下げることなしに，計算時間を大幅に削減できることを報告する．

2 多次元非線形ナップザック問題と近似解法

多次元非線形ナップザック問題は次のように書ける．

$$\mathbb{P}:\max\{f(\mathbb{x})\mid g(\mathbb{x})\le \mathbb{b}, \mathbb{x}\in\mathbb{K}\}$$

ただし、

$$\mathbb{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
$$g(\mathbb{x})=(g_1(\mathbb{x}),g_2(\mathbb{x}),\ldots,g_m(\mathbb{x})),$$
$$\mathbb{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_m),$$
$$\mathbb{K}=\{\mathbb{x}\mid x_i\in K_i \ \ for\ i=1,2,\ldots,n\},$$
$$K_i=(1,2,\ldots,k_i),$$

ここで，K_iは変数x_iが取りうる代替項目集合である．この問題に対応した代理双対問題$\mathbb{P}^{SD}$は次のように書ける．

$$\mathbb{P}^{SD}:\min\{v^{Opt}[\mathbb{P}^{S}(\mathbb{u})]\mid \mathbb{u}\in\mathbb{U}\},$$

ただし，$v^{Opt}[\circ]$は問題○の最適値，

$$\mathbb{P}^{S}(\mathbb{u}):\max\{f(\mathbb{x})\mid \mathbb{u}g(\mathbb{x})\le\mathbb{u}\mathbb{b},\ \mathbb{x}\in\mathbb{K}\},$$
$$\mathbb{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_m),$$
$$\mathbb{U}=\{\mathbb{u}\mid \textstyle\sum_{j=1}^{m}u_j=1,\ \mathbb{u}\ge 0\}.$$

問題$\mathbb{P}^{S}(\mathbb{u})$は原問題$\mathbb{P}$の代理問題で制約条件式が一つである．この代理問題は，モジュラ法 [7], [8] を用いて高速に解くことが可能である．モジュラ法は，次の1)と2)の操作を繰り返して原問題をより規模の小さい等価問題へ変換する．

1) 等価問題に対して深測操作を適用し決定空間(変数の項目空間)を縮小する
2) 等価問題の変数の中から２個の変数を選び一つの変数に統合することで，変数の数を一つ減らした等価問題を作る．

ここで，深測操作とは変数の項目を固定してできた部分問題に対して次の３つのテストを行う操作である．

1) 実行可能性テスト
   部分問題が実行可能解を含むかどうかテストする．
2) 優越テスト
   他の部分問題と比較して，その部分問題が明らかに劣っていないかどうかをテストする．
3) 限界値テスト
   部分問題の限界値を求め，現在の暫定解の値と比較し暫定解よりも良い解を含むかどうかを判定する．

また，選ばれた二つの変数を一つの変数に統合する統合政策は，各変数に対して上界値の最大と最小の差(上界値差)の大きい二つの変数を優先選択する．すなわち，現在の問題を$\mathbb{P}^{C}$と書き，変数集合をN^{C}，各変数の代替項目集合をK_i^{C} $(i\in N^{C})$とおくと，

$$\min\{p_{i_1},p_{i_2}\}\ge\max\{p_i\mid i_1,i\ne i_2, i\in N^{C}\}$$

となるi_1,i_2を選択する，ここで

$$p_i=\max\{v^{UB}[\mathbb{P}^{C}:x_i=a]\mid a\in K_i^{C}\}$$
$$\quad-\min\{v^{UB}[\mathbb{P}^{C}:x_i=a]\mid a\in K_i^{C}\},$$

$v^{UB}[\mathbb{P}':\circledcirc]$は制約◎を追加した問題$\mathbb{P}'$の上界値である．また最適な代理乗数$\mathbb{u}^*$はＣＯＰ法[4]，[5]，[6]を用いて求めることができる．得られた最適代理乗数$\mathbb{u}^*$に対する標的問題は

$[\mathbb{TP}^{(0)}(f^{T})]$: Enumerate all solutions $\mathbb{x}$ hitting
a target $f(\mathbb{x})\ge f^{T}$
subject to $\mathbb{u}^*g(\mathbb{x})\le\mathbb{u}^*\mathbb{b}$,
$\mathbb{x}\in\mathbb{K}$,

と書ける．ここで，この標的問題をモジュラ法で解く過程で，深測操作と統合操作がl回$(0 \le l \le n)$繰り返された後変数の数が$n-l$個になった等価問題を$\mathbf{TP}^{(l)}(f^{\mathrm{T}})$と書く．このとき提案する近似解法の計算手順は擬似コードを用いて下記のように表現できる．

近似解法

入力：原問題$\mathbf{P}$，刻み幅d，変数の個数s，
代替項目数α；

1．$\mathbf{P}$の代理双対問題$\mathbf{P}^{\mathrm{SD}}$を解き，最適乗数$\mathbf{u}^*$と解$\mathbf{x}^{\mathrm{SD}}$を求める；
2．If $\mathbf{x}^{\mathrm{SD}}$が$\mathbf{P}$の実行可能解である then
3．　$\mathbf{x}^{\mathrm{Exact}} \leftarrow \mathbf{x}^{\mathrm{SD}}$とする；
4．　このアルゴリズムを終了する；
5．EndIf
6．$f^{\mathrm{U}} \leftarrow f(\mathbf{x}^{\mathrm{SD}}),\ f^{\mathrm{L}} \leftarrow f(\mathbf{x}^{\mathrm{SD}})-d$とおく；
7．問題$\mathbf{TP}^{(n-r)}(f^{\mathrm{L}})$ $(r \le s)$の代替項目の合計数がα以上になるようにf^{L}の値をdずつ下げながらf^{L}の値を設定する；
8．変数の数がs個の問題$\mathbf{TP}^{(n-s)}(f^{\mathrm{L}})$の代替項目の合計数が$\alpha$以上で$1.2\alpha$以下となる$f^{\mathrm{T}}$の値を$f^{\mathrm{L}}$と$f^{\mathrm{U}}$の間で二分探索法を用いて求める；
9．問題$\mathbf{TP}^{(n-s)}(f^{\mathrm{T}})$を厳密に解く．得られた解を$\mathbf{x}^{\mathrm{Near}}$とする．

ただし，刻み幅dは経験的に決定する．この近似解法では変数がs個の問題$\mathbf{TP}^{(n-s)}(f^{\mathrm{T}})$で比較的簡単に解ける規模の標的値$f^{\mathrm{T}}$を定め，得られた問題$\mathbf{TP}^{(n-s)}(f^{\mathrm{T}})$の標的解(標的に当たった解)の中で原問題$\mathbf{P}$の制約条件を満たす最善の解を準最適解とする．

3　計算実験

提案した近似解法の有効性を評価するためにChuら[1]で取り扱われた5制約500変数の0-1ナップザック問題30問を用いた．この問題は目的関数と制約条件の係数が相関を持って乱数で生成されているため，乱数を独立に用いて作成した問題よりはるかに難しいことが知られている．実験では，本近似解法のパラメータ$s=20, \alpha=5000, d=40$では平均計算時間13.6秒で正答率0.8となり，$s=25, \alpha=5000, d=40$では平均計算時間55.8秒で全問正解が得られた．また，ChuらのGA[3]では平均計算時間1343.5秒で正答率0.2，商用の世界最速と評価が高いILOG社CPLEX(有効桁数4桁，相対誤差0.0001，絶対誤差1.0e-6)では平均計算時間2955.6秒で正答率0.833，Vasquezらのタブサーチ[11]では正答率0.467であった．

4　おわりに

本論文で提案した近似解法は高い確率で厳密解を見つけている，また正解が見つからなかった場合でも極めてよい準最適解を見つけている．本解法は計算時間と正答率の両面で優れており，実用的観点から見て極めてよい特質を持つことが分った．今後の課題としては，更に他のテスト問題を解くことで応用範囲を広めることと，アルゴリズムの更なる改良を予定している．

参考文献

[1] P. C. Chu and J. E. Beasley, "A Genetic Algorithm for the Multidimensional Knapsack Problem," Journal of Heuristics, vol. 6, pp. 63-86, 1998.

[2] M. E. Dyer,"Calculating Surrogate Constraints," Mathematical Programming, vol.19, pp. 255-278, 1980.

[3] F. Glover, "Surrogate Constraints," Operations Research, vol.16, pp. 741-749, 1968

[4] Y. Nakagawa and S. Miyazaki, "Surrogate Constraints Algorithm for Reliability Optimization Problems with Two Constraints," IEEE Trans. on Reliability, vol. R-30, pp. 175-180, 1981.

[5] Y. Nakagawa, M. Hikita and H. Kamada, "Surrogate constraints algorithm for reliability optimization problems with multiple constraints," IEEE Trans. on Reliability, vol. R-33, no. 4, pp. 301-305, Oct. 1984.

[6] 仲川，疋田，鎌田："代理双対問題を解くためのアルゴリズム，" 電子通信学会論文誌，vol. J67-A, No.1, pp. 53-59, Jan.1984.

[7] 仲川，"離散最適化問題のための新解法，" 信学論(A), vol. J73-A, no. 3, pp. 550-556, Mar. 1990.

[8] Y. Nakagawa and A. Iwasaki, "Modular Approach for Solving Nonlinear Knapsack Problems," IEICE Transactions on Fundamentals, vol. E82-A, no. 9, pp. 1860- 1864, Sep. 1999.

[9] Y. Nakagawa, "A reinforced surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming," RIMS 1068, Kyoto University, pp. 194-202, 1998.

[10] Y. Nakagawa, "An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming", Journal of Operations Research Society of Japan, vol. 46, no. 2, pp. 145-163, Jun. 2003.

[11] M. Vasquez and J. Hao, "A hybrid approach for the 0-1 multidimentional knapsack problem", IJCAI, pp. 328-333, 2001