日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

双対定理の図解

01700130　柳井　浩　YANAI Hiroshi

1　転置行列　いま，次の2×2行列を考える：

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ p_1 & , & p_2 \\ | & & | \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & , & q_2 \\ | & & | \end{bmatrix} \qquad (1)$$

行列Aはp_1, p_2を直交座標平面上に描くことによって図示出来る．これから図1のようにして転置行列A^Tを構成する列ベクトルq_1, q_2が求められる．補助として

$$\ell_{1(2)} \ : \ p_{1(2)}\text{の終点を結ぶ直線} \qquad (2)$$

$$\vartheta \ : \ \text{第1，第3象限の対角線} \qquad (3)$$

を用いる．

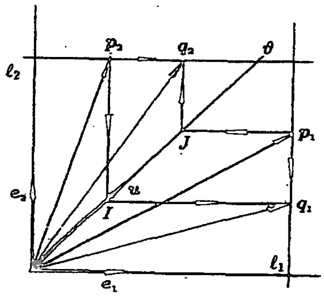

図　1　行列と転置行列

このとき，$p_1, p_2; q_1, q_2$の位置の間に次のような関係が成立する．

定理1　対角交叉点一致の定理　p_1, p_2 の終点を結ぶ直線とq_1, q_2の終点を結ぶ直線は対角線ϑ上の一点 v で交わる．この点を対角交叉点とよぶ．

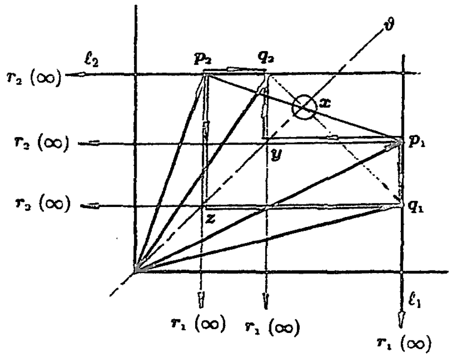

図　2　対角交叉点一致の定理

定理2　錐の位置に関する定理

$$\text{主錐}\ \mathcal{P} \ : \ p_1, p_2\text{が張る錐} \qquad (4)$$

$$\text{双対錐}\ \mathcal{P}^T \ : \ q_1, q_2\text{が張る錐} \qquad (5)$$

とするとき，主錐が第3象限と原点以外にも共通部分を持つための必要充分条件は双対錐が第1象限と原点以外に共通部分を持たないことである．

これらの定理は射影幾何学においてよく知られた*Pappus*の定理を用いて証明することが出来る．

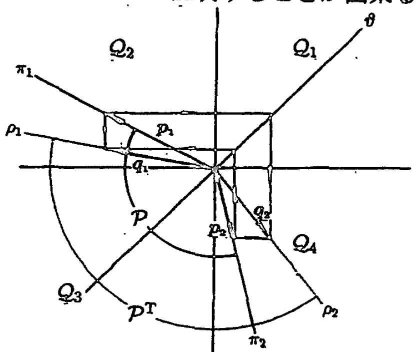

図　3　錐の位置に関する定理

2　双対問題　ここでは，次の 主問題と双対問題を考える：

A．主問題

目的関数：　$f = u^T x = max!$ ，

制約条件：　$Ax \leq u$ ，$x \geq 0$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} | & & | \\ p_1 & , & p_2 \\ | & & | \end{bmatrix}$$

B．双対問題

目的関数：　$g = u^T y = min!$ ，

制約条件：　$A^T y \geq u$ ，$y \geq 0$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & , & q_2 \\ | & & | \end{bmatrix}$$

双対定理　これらの間に次の関係が成立する：
主問題が有限な最適解$\hat{x}$ をもてば，
双対問題も有限な最適解$\hat{y}$ をもち，その間には，

$$c^T \hat{x} = b^T \hat{y}$$

という関係が成立する．また，主問題の目的関数が上方に有界でなければ，双対問題は許容解をもたない．

問題の図解　これらの問題は次のように図解される．

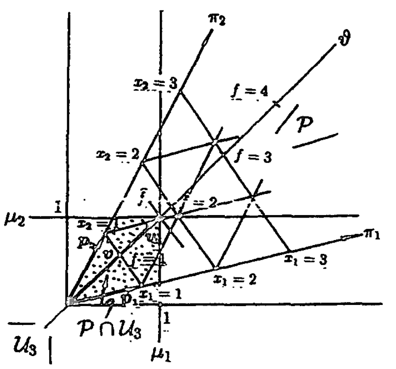

図　4　主問題の図解

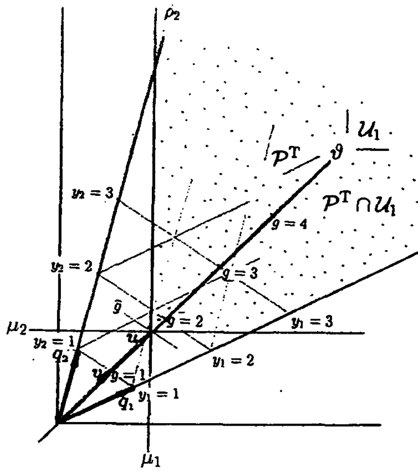

図　5　双対問題の図解

すなわち，主(双対)問題の変数$\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{y}$)は列ベクトル$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ を基底とする斜交座標として表され，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ を結ぶ直線が，目的関数$f(g)$の値が "1" の等高線になる．そこで，対角線ϑに$\boldsymbol{v}$ を単位として目盛れば，これによって目的関数の値を等高線から直接読みとれる．しかもこれは，主・双対両方の目的関数に共通の尺度である．したがって，双対定理を調べるにはこれら２つの図を重ねて考えればよい．

最適解の有界性と許容解の存在　主問題の最適解が上方に有界でないのは，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$の非負線形結合で第３象限に属するものが存在する場合であるが，この場合には定理２によって$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$から第１象限に属する非負結合が作れないので，双対問題には許容解が存在しない．

最適解の位置　有限な値を持つ最適解が存在する場合，両問題の最適解となりうる点は主・双対問題を載せる直交座標平面において

$$\mu_{1(2)} \quad : \quad \boldsymbol{u} + \xi_{2(1)} \boldsymbol{e}_{2(1)} \tag{6}$$

$$\pi_i \quad : \quad \boldsymbol{p}_i \text{を延長した半直線} \qquad i = 1, 2 \tag{7}$$

$$\rho_i \quad : \quad \boldsymbol{q}_i \text{を延長した半直線} \qquad i = 1, 2 \tag{8}$$

とするとき，主問題の最適解としては

$$\boldsymbol{u} \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{d}_{ij} : \pi_i \text{と} \mu_j \text{の交点} \quad i, j = 1, 2$$

双対問題の最適解としては

$$\boldsymbol{u} \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{d}^*_{ij} : \rho_i \text{と} \mu_j \text{の交点} \quad i, j = 1, 2$$

のいずれかを考えておけばよい．

定理３　双対点の定理　$\boldsymbol{d}_{ij}$における主問題の目的関数の値は$\boldsymbol{d}^*_{ji}$における双対問題の目的関数の値と等しい．これらを双対点とよぶ．

この定理は，定理１を用いて幾何学的に証明出来る．

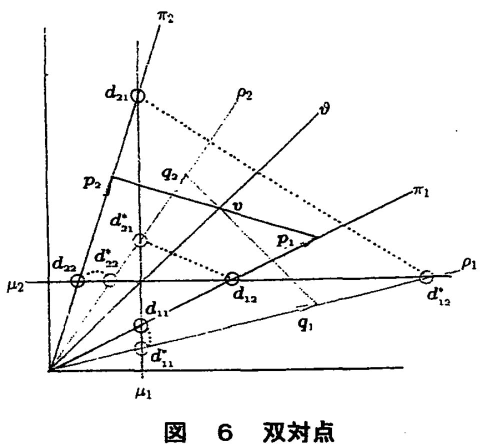

図　6　双対点

最適解が$\boldsymbol{u}$にある場合　主(双対)問題の最適解が点 $\boldsymbol{u}$ にあるには対角交叉点$\boldsymbol{v}$が主(双対)錐に属していて，目的関数の等高線の方向$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1)$が第２あるいは第４象限に属していなければならない：

$$(a) \qquad \boldsymbol{v} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}_1 (\in \mathcal{P}^{\mathrm{T}} \cap \mathcal{Q}_1) \tag{9}$$

$$(b) \qquad \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 (\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1) \in \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_4 \tag{10}$$

しかし，条件(a)の下では

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 \in \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_4 \Leftrightarrow \boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1 \in \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_4 \tag{11}$$

が成立することが，対角交叉点一致の定理によって証明されるから，$\boldsymbol{u}$が主(双対)問題の最適解であれば，双対(主)問題の最適解でもある．両者における目的関数の値が等しいことも定理１から明らかである．

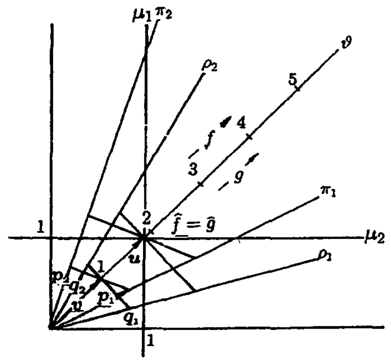

図　7　最適解が$\boldsymbol{u}$にある場合

最適解が$\boldsymbol{u}$以外の点にある場合　$\boldsymbol{d}_{ij}$が主問題の最適解であるための必要充分条件は

$$\boldsymbol{p}_i \quad \in \quad \mathcal{D}_{2j-3} \cap (\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_{6-2j}) \quad \text{かつ} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 \quad \in \quad \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_{4(2i-3)(2j-3)} \tag{13}$$

であり，$\boldsymbol{d}^*_{ji}$が双対問題の最適解である必要充分条件は

$$\boldsymbol{q}_j \quad \in \quad \mathcal{D}_{3-2i} \cap \mathcal{Q}_1 \quad \text{かつ} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1 \quad \in \quad \mathcal{Q}_{5-2j} \cup \mathcal{Q}_{4(2i-3)(3-2j)} \tag{15}$$

である．ここに，

$$\mathcal{D}_{+1(-1)} : \vartheta \text{の上(下)半平面} \tag{16}$$

である．

これらは$\boldsymbol{d}_{ij}, \boldsymbol{d}^*_{ij}$の位置およびこれらの点における目的関数の等高線と許容領域の境界の方向から導かれるのだが，これらの条件のもとで行列Aの成分の範囲を調べれば，二つの必要充分条件の等価が示される．

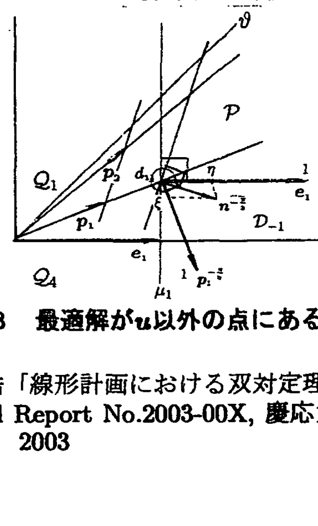

図　8　最適解が$\boldsymbol{u}$以外の点にある場合

参考文献

[1] 柳井　浩「線形計画における双対定理の図解」
Technical Report No.2003-00X, 慶応大学理工学部管理工学科，2003