日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春期研究発表会

競合する基準の下での施設配置問題

01013344 神戸芸術工科大学 *大角 盛広 OSUMI, Shigehiro
01005194 大阪大学大学院 石井 博昭 ISHII, Hiroaki
01604094 追手門学院大学 見市 晃 MIICHI, Akira

1 はじめに

本論文では、平面上の 1 施設 minimax 配置問題に、(1) 配置禁止領域が存在するという制約を導入し、さらに (2) 住民の最小の満足度の最大化という目的を加えた。また、郊外と都市部など地域により異なる距離の捉え方を近似するため、ユークリッド距離と直角距離とを用いて問題を考察した。

minimax 基準は、最も遠い需要点までの距離を最小化すべく施設を配置するものであり、消防署や病院や学校などの公共施設の配置に応用されることが多い。しかし、建築規制等を表現するため、配置禁止領域を導入した方がモデルとして妥当である。また、ゴミ処理場などのように環境への配慮が必要な施設については、必ずしも minimax 基準だけでは満足できない場合がある。ここでは、行政側は距離の最大最小化をめざして配置しようとし、住民側は迷惑施設がなるべく遠くにできてほしいと望むような場合をモデル化した。すなわち、住民の満足度が施設までの距離に対して広義単調増加するとき、距離の minimax 基準を可能な限り満たしつつ、住民の最小の満足度を最大にするような施設配置を求める問題を定式化した。

この問題を解くためにいくつかの性質を導き、それらを利用して多項式時間で問題を解くアルゴリズムを提案する。

2 禁止領域を伴う Minimax 基準

平面上に l 個の需要が離散的に存在するとし、それぞれに配置禁止領域が付随するものとする。さらに $n-l$ 個の配置禁止領域が存在するものとする。配置禁止領域の通過に関しては制限はないものとする。公園など任意の形の配置禁止領域は、これらの和集合で近似できる。以下の表記を用いる。

x ： 施設の位置
a_i ： 需要点の位置 $(i=1,\cdots,l)$
a_i ： 配置禁止領域 F_i の中心の位置 $(i=l+1,\cdots,n)$
r_i ： F_i の半径 $(r_i>0)$
$d(p,q)$ ： p,q 間の距離

配置禁止領域を $F_i=\{p \mid d(p,a_i)<r_i\}$、その境界を $B_i=\{p \mid d(p,a_i)=r_i\}$ とする。配置禁止領域の全体を $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ で表すと、実行可能領域は $\mathcal{R}^2 \setminus F$ となる。

配置禁止領域を考慮した minimax 配置問題 P1 は

$$\text{P1}: \quad \text{minimize} \quad \max_{1\le i\le l} d(x,a_i) \qquad \text{subject to} \quad x\in\mathcal{R}^2\setminus F$$

となる。

a_i に対する最遠 Voronoi 領域を $FV(a_i)=\{p \mid d(p,a_i)\ge d(p,a_j),\, a_j\in P\setminus\{a_i\}\}$ で定義する。ただし P は全需要点の集合である。凸包を構成する点のみが最遠 Voronoi 領域を持つ。

3 解の性質と解法

配置禁止領域がない場合には、minimax 配置問題の解は、需要点の最小包囲円の中心となることが知られている。最小包囲円の中心を O で表すと、ユークリッド距離の場合には O は最遠 Voronoi 点のひとつと等しく $O(l\log l)$ の手間で求められる。直角距離を用いた場合は最小包囲円の中心は 1 点に定まらない。中心の集合である線分を Q で表すと、Q は最遠点対 a^1,a^2 に対する $FV(a^1)$ と $FV(a^2)$ の境界線となり、最遠点対を $O(l)$ で求めれば直ちに求められる。

Property 1 $O\in F$(または $Q\in F$)ならば、最適解 x^* は次の手続きで構成される集合 S(= 連結配置禁止領域) の境界 B に存在する。(1) $S\leftarrow\phi$; (2) *for all* i, *if* $F_i\cap O\neq\phi$ *or* $F_i\cap S\neq\phi$ *then* $S\leftarrow F_i\cup S$.

最適解は必ずしも O(または Q) を含む F_i の境界 B_i に存在するとは限らない ($B_i\in F$ のことがあるため)。また、直角距離の場合は Q から最も近い実行可能領域が最適解となるが、ユークリッド距離の場合は O から最も近い実行可能領域が必ずしも最適解とはならない。

Property 2 最適解の候補は $\tilde{B}_i$ の端点、及び B_i と最遠 *Voronoi* 辺との交点である。ただし $\tilde{B}_i=B_i\cap B$。

これらの性質を使うと、P1 を解くアルゴリズムの概要は以下のようになる。

Step 1. 需要点の最小包囲円の中心 O を求める。
Step 2. O を含む連結配置禁止領域の境界 B を求める。

Step 3. 需要点の凸包を求め最遠 Voronoi 図を構成する。

Step 4. すべての $\bar{B}_i \subseteq B$ について、端点及び最遠 Voronoi 辺との交点の位置を解候補として記録する。同時に、その点から最遠点までの距離も記録する。

Step 5. 列挙された候補解のうち、最遠需要点までの距離が最小になっている点が最適解 x^* である。

Step 1 と 3 は $O(l \log l)$ の計算量を要する。Step 2 は S の構成に最悪の場合 $O(l^2)$ の手間がかかる。Step 4 と 5 は最悪 l^2 に比例する候補点を走査するので $O(l^2)$ となり、全体の計算手間は $O(l^2)$ となる。

4 競合基準の導入

施設が x にあるとき、ある需要点 a_i での満足度が次の λ_i で表されるものとする。

$$\lambda_i(x, a_i) = \begin{cases} 0, & 0 \le d(x, a_i) < d_{i_1} \\ \dfrac{d(x, a_i) - d_{i_1}}{d_{i_1}}, & d_{i_1} \le d(x, a_i) < d_{i_2} \\ 1, & d(x, a_i) \ge d_{i_2} \end{cases}$$

d_{i_1}, d_{i_2} は a_i に付随する定数である。$\lambda_i = 0$ である領域は配置禁止領域とみなされる。多目的最適化問題 P2 は以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \text{P2} \ : \quad & \text{minimize} \quad \max_{1 \le i \le l} d(x, a_i) \\ & \text{maximize} \quad \min_{1 \le i \le l} \lambda_i(x, a_i) \\ & \text{subject to} \quad x \in \mathcal{R}^2 \setminus F \end{aligned}$$

ここで、α-level 実行可能集合 $A_{i\alpha} = \{x \mid \lambda_i(x, a_i) \ge \alpha\} (0 \le \alpha \le 1 \ , \ 1 \le i \le l)$ を導入する。このとき、α-level 配置禁止領域は $F_{i\alpha} = \mathcal{R}^2 \setminus A_{i\alpha}$, $F_\alpha = \bigcup_{i=1}^{l} F_{i\alpha}$ となる。$F_{i\alpha}$ の境界を $B_{i\alpha}$ とすると、その半径 $r_i(\alpha)$ は $0 < \alpha < 1$ の区間で α に関して $(d_{i_2} - d_{i_1})$ の傾きで d_{i_1} から d_{i_2} まで増加する。

ある α-level を定めたとき、P2 は次の一目的最適化問題に緩和される。

$$\begin{aligned} \text{P2}(\alpha) \ : \quad & \text{minimize} \quad \max_{1 \le i \le l} d(x, a_i) \\ & \text{subject to} \quad x \in \mathcal{R}^2 \setminus (F_\alpha \cup F) \end{aligned}$$

P2(α) の最適解を $x^*(\alpha)$ とし、$x^*(\alpha)$ と O(または Q) との距離を $d^*(\alpha)$ で表す。$x^*(\alpha)$ を含む最遠 Voronoi 領域を $FV(a_i)$ とすると、$x^*(\alpha)$ を中心にした最小包囲円の半径は $R(\alpha) = d(a_i, x^*(\alpha))$ と表すことができる。

5 解の性質とトレードオフ

$\alpha = 0$ の場合について P2 を P1 と同様に解き、解を $x^*(0)$ で表す。α が増加するにつれ、$F_{i\alpha}$ が拡大し、その境界上に存在する $x^*(\alpha)$ が動くとともに $d^*(\alpha)$ は広義に増加する。

直角距離の場合、次の性質が成り立つ。

Property 3 直角距離の場合、$d^*(\alpha)$ は区分的に線形な増加関数である。

$d^*(\alpha)$ が不連続になり得る点は、α の増加に対して (1)$B_i(\alpha)$ と $B_j(\alpha)$ が最初に交わる点と次に交わらなくなる点、(2)$B_i(\alpha)$ が各最遠 Voronoi 辺と最初に交わる点、(3) 別々の最遠 Voronoi 領域にある a_i と a_j に関して $d(Q, a_i) + r_i(\alpha) = d(Q, a_j) + r_j(\alpha)$ となる点、で網羅され l^2 に比例する分割区間が生じる。

これを昇順に整列し、k 番目の区間を $\alpha_k = [\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ とする。例えば、$\alpha \in \alpha_k$ で $x^*(\alpha) \in FV(a^1) \cup FV(a^2)$ かつ $x^*(\alpha) \in B_i$ のとき、$R(\alpha) = r_i(\alpha) + C$ (C は定数) となる。$x^*(\alpha) \notin FV(a^1) \cup FV(a^2)$ かつ $x^*(\alpha) \in B_i \cap B_j$ のとき、$R(\alpha) = r_i(\alpha) + r_j(\alpha) + C$ となる。$r_i(\alpha)$ は d_{i_1}, d_{i_2} で決まる線形関数であるから、適当な係数 τ を取ることで満足度と最小包囲円の半径とのトレードオフを考えることができる。

ユークリッド距離で B_i 上に x^* がある場合、$d^*(\alpha) = \sqrt{c_1 + (d_i\alpha)^2 + c_2\sqrt{(d_i\alpha)^2 - c_3}}$ の形になる ($d_i = d_{i_2} - d_{i_1}$、$c_1 \cdots c_3$ は定数)。その他の性質やトレードオフについては発表で述べたい。

6 まとめ

迷惑施設の妥当な配置を決定するため、現実の建設規制等を近似する配置禁止領域の概念を導入して minimax 配置問題を解いた。最小包囲円の中心を含む連結配置禁止領域の境界上に解が存在することを示し、解を求めるアルゴリズムを示した。距離としてユークリッド距離と直角距離を用い、それぞれ郊外と都市部の状況を近似を示した。さらに、行政と住民の要求が異なる場合のモデルとして、mimimax 基準とは競合する基準を同時に考えるモデルを導入し、解の性質を調べた。また、minimax 基準には直角距離を用いるとともに、maximin 基準にはユークリッド距離を用いた複合問題も考察中である。これは、各種移動は碁盤目状の道路沿いに行われ、騒音や汚染等は円形に広がるという状況のモデルとなる。

参考文献

[1] A.Okabe, B.Boots and K.Sugihara, “Spatial tessellations - Concepts and applications of Voronoi diagrams”, Wiley, Chichester, UK (1992).

[2] Y.Ohsawa, “Bicriteria Euclidean Location Associated with Maximin and Minimax Criteria”, Naval Research Logistics, Vol. 47 (2000), pp.581-591.