日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

木構造動的ネットワークにおける複数の施設への避難誘導問題

02602474　大阪大学　*間々田　聡子　*MAMADA Satoko
01605984　大阪大学　牧野　和久　MAKINO Kazuhisa
01502254　京都大学　藤重　悟　FUJISHIGE Satoru

1　序論

動的ネットワーク $\mathcal{N}$ は，各枝 $a \in A$ が容量 $u(a)$ と移動時間 $\tau(a)$ をもつ有向グラフ $G=(V,A)$ によって定義される．例えば建物から避難するような問題を考える場合，点 $v \in V$ はオフィス，ホールなどの部屋を，枝 $a \in A$ は，それらの部屋をつなぐ廊下を表しており，枝 $a=(v,w)$ に対して，$u(a)$ は枝 a を通って移動できる単位時間当たりの人数の上限，$\tau(a)$ は枝 a を通って点 v から点 w へ移動するのにかかる時間を表している．動的ネットワーク中のいくつかの供給点から需要点へ定まった量を最短時間で送り出す問題については，B. Hoppe–É. Tardos [1] によって多項式時間アルゴリズムが提案されているが，それは高次の多項式時間アルゴリズムである．そこで我々は [2, 3] において，対象となるネットワークが木構造であり，各点に与えられた供給量を最速に送り出すような最適な出口を見出す問題を考え，[3] において，$\mathrm{O}(n \log^2 n)$ 時間アルゴリズムを提案した (ただし，n は点数である)．

本研究では，与えられた供給量 $d(v)$ $(v \in V \setminus S)$ を与えられた出口集合 $S \subseteq V$ $(|S|=k)$ へ最速に送り出すフローを求める問題を考える．ただし，各点を経由するフローは，その点に接続する同一の枝を通ると仮定する．この仮定は，木構造動的ネットワークとして実際の交通網をみたとき，その災害時において住民 (各点の供給量に相当する) を公平に，かつ混乱なく避難誘導を行うためのひとつの解決策として妥当なものと考えることが出来る．このとき，我々は k 個の施設への避難誘導問題が $\mathrm{O}(kn^2 \log^2 n)$ 時間で解けることを示す．

2　問題の定義

木構造の動的ネットワーク $\mathcal{N}=(T=(V,A),u,\tau,d)$ を考え，V は点集合，A は枝集合，$u: A \to \mathbb{R}_+$ は各枝に非負の実数を与える容量関数，$\tau: A \to \mathbb{R}_+$ は各枝の一方の端点から他方の端点への移動時間を与える関数であり，さらに，供給量 $d: V \to \mathbb{R}_+$ が与えられている．各枝 $a \in A$ と任意の $\theta \in \mathbb{R}_+$ に対して，$f_a(\theta)$ を枝 a に時刻 θ で入り込み，時刻 $\theta+\tau(a)$ に枝 a の終点に到着する（単位時間当たりの）フロー量とする．$f_a(\theta)$ $(a \in A, \theta \in \mathbb{R}_+)$ が (1) 容量制約，(2) 流量保存則，(3) 供給量制約を満たすとき，連続時間動的フローと呼ぶ．ただし，各点でフローの滞留は可能であるとする．

ここでは，与えられた供給量 $d(v)$ $(v \in V \setminus S)$ を出口集合 $S \subseteq V$ $(|S|=k)$ へ送り出す最速なフローを求める問題を考える．このとき，

(*)　各点 v を経由するフローは，v を始点とする同一の枝を通る

と仮定する．また，$T_v=(V_{T_v}, A_{T_v})$ を v を根とする T の部分木とし，$V_{T_v} \subseteq V$，$A_{T_v} \subseteq A$ は，それぞれ T_v の点集合，枝集合である．$C(T_v)$ を T_v において，T_v 中のすべての供給量を出口集合 $S \cap V_{T_v}$ へ送り込む時間が最小になるようなフローを求める問題（以下，この問題をフロー問題と呼ぶ）を解いたときに与えられる完了時間（すなわち，すべての供給量が出口に到着するまでにかかる最速の時間），T_v の根である v に対する供給量 $d(v)$ を $w \in S \cap V_{T_v}$ へ必ず流す条件のもとで，T_v においてフロー問題を解いたときに与えられる完了時間を $C_w(T_v)$ とする．すなわち，

$$C(T_v)=\min\{C_w(T_v)\,|\,w \in S \cap V_{T_v}\} \qquad (1)$$

である．また，仮定 (*) より，T は k 個の木 $T[V_i]$ $(i=1,2,\cdots,k)$ に分割される．ただし，V_i は出口 $t_i \in S$ を唯一つ含み，$T[W]$ は，$W \subseteq V$ によって誘導される T の部分グラフを表す．よって，本問題は，次のような

$$C(T)=\min_{\substack{\{V_1,\cdots,V_k\}:\\ V\text{の分割}}} \max_{t_i \in S}\{C(T[V_i])\}$$

を求めるミニ・マックス問題と考えることができる．

3　アルゴリズム

本研究で提案するアルゴリズムの直感的な枠組みは以下の通りである．任意に根を定め，葉から根まで順に点 v に対する部分木 T_v でのフロー問題を考える．このとき動的計画法を用いることにより，v の子孫 w に対するフロー問題の解の情報を用いて，効率的に T_v に対するフロー問題を計算する．

具体的に言うと，図 1 のような部分木 T_v におけるフロー問題を考える．このとき，根 v の供給量 $d(v)$ は $S \cap V_{T_v}$ のいずれかに送り込まれる．よって，$d(v)$ が

出口 $w \in S \cap V_{T_v}$ へ送り込まれると仮定し，$C_w(T_v)$ を計算する．この際, どの点の供給量を w に送るかを考慮しながら計算する．この $C_w(T_v)$ から式 (1) を用いることで，$C(T_v)$ を求める．

以下のアルゴリズムでは，出口はすべて T の葉と仮定する（このように仮定しても一般性は失われない）．

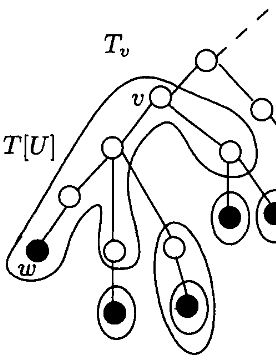

図 1: 部分木 (黒の点が出口である).

Algorithm PARTITION

Input: 木構造動的ネットワーク $\mathcal{N} = (T = (V, E), u, \tau, d)$, 出口集合 S（ただし，$|S| = k$）.

Output: $\max_{t_i \in S}\{C(T[V_i])\}$ を最小にするような V の分割 $\{V_1, \cdots, V_k\}$.

Step 0: 任意の点 $r \in V \setminus S$ を根，$W := \emptyset$ ($C(T_v)$ を計算した v を保存する)，$\lambda(v) := 0\,(v \in S)$ とする．各葉 v に対して $C(T_v) = 0$ ($v \in S$ のとき), $+\infty$ ($v \notin S$ のとき)，$W := W \cup \{v\}$ とする．

Step 1: 子がすべて W に含まれる v に対して，

$|S \cap V_{T_v}| = 1$ ならば，フロー問題を解き，$W := W \cup \{v\}$ として，Step 1 へ.

そうでなければ，$S' = S \cap V_{T_v}$ とする．

Step 2: $x \in S'$ に対して，$\{C(T_w) \,|\, w \in W \setminus P_{xv}\}$ の要素を $C_1 (= 0) < C_2 < \cdots < C_h$ と並べる．ただし，P_{xv} は x と v とを結ぶパス上にある点集合とする．$C_i < \lambda(x) \le C_x(T_v) < C_{i+1}$ である i を求める．

Step 3: $U_i := V_{T_v} \setminus \{w \in V_{T_v} \setminus P_{xv} \,|\, C(T_{w'}) \le C_i$ を満たすある $T_{w'}$ に属する $w\}$ を定める．

もし $C(T[U_i]) \le C_{i+1}$ ならば，$\lambda(x) := \max\{C_i, C(T[U_i])\}$，$C_x(T_v) := \lambda(x)$，$S' := S' \setminus \{x\}$ とする．

そうでなければ，$i := i + 1$ として Step 3 へ.

Step 4: $S' \neq \emptyset$ ならば，Step 2 へ.

そうでなければ，

$W := W \cup \{v\}$，$C(T_v) = \min\{C_w(T_v) \,|\, w \in S \cap V_{T_v}\}$.

$T_v = T$ ならば，$T[V_i]$ $(i = 1, \cdots, k)$ を出力して終了.

そうでなければ，Step 1 へもどる． □

以下，計算時間について評価する．Step 3 において，$C_x(T_v)$ は [3] で提案された $O(n \log^2 n)$ 時間アルゴリズムを用いる．ここで，$C(T_v)$ の単調性を利用することで，$C_x(T_v)$ を高々 $2kn$ 回求めればよいことが分かる．従って，

$$O(n \log^2 n) \times 2kn = O(kn^2 \log^2 n)$$

時間で解ける．

定理 1 k 個の出口に対する木構造の動的ネットワーク上の避難誘導問題は $O(kn^2 \log^2 n)$ 時間で解くことができる． □

4 結論と今後の課題

k 個の出口に対する木構造の動的ネットワーク上の避難誘導問題は $O(kn^2 \log^2 n)$ 時間で解くことができることを示した（ただし，n は点数）．

さらに，この問題の他に，(1) ある決められた時間内の流出量を最大にする出口を求める問題，(2) より一般のネットワークを想定した問題，(3) 複数個の出口を求める問題などが今後の課題として挙げられる．

謝辞

本研究は，科学研究費補助金 (学術創成研究費 (2))(課題番号 13GS0018) の支援による．

参考文献

[1] B. Hoppe and É. Tardos: The quickest transshipment problem, *Mathematics of Operations Research*, **25** (2000) 36–62.

[2] S. Mamada, K. Makino and S. Fujishige: Optimal sink location problem for dynamic flows in a tree network, *IEICE Trans. Fundamentals*, **E85-A** (2002) 1020–1025.

[3] S. Mamada, T. Uno, K. Makino and S. Fujishige: An $O(n \log^2 n)$ algorithm for the optimal sink location problem on dynamic tree networks, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, (2003) 160–161.