日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

ロバストNash均衡点と二次錐相補性問題

京都大学大学院情報学研究科　*林 俊介　HAYASHI Shunsuke
京都大学大学院情報学研究科　山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
京都大学大学院情報学研究科　福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　はじめに

m 人のプレイヤーが各々のコストを最小化する非協力ゲームを考える．プレイヤー i が取る戦略を $x_i \in \Re^{n_i}$ とし，プレイヤー全体の戦略を $x := (x_1, \ldots, x_m)$ と表す．また，プレイヤー i 以外のプレイヤーが取る戦略を $x_{-i} := x \backslash x_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ と表す．さらに，プレイヤー i のコストは関数 $f_i : \Re^{n_1} \times \cdots \times \Re^{n_m} \to \Re$ を用いて $f_i(x_i, x_{-i})$ で与えられるものとし，プレイヤー i が取ることができる戦略の集合は $S_i \subseteq \Re^{n_i}$ で与えられているとする．このとき，プレイヤー i は，他のプレイヤーの戦略 x_{-i} が与えられたとき，次のコスト最小化問題を解いて戦略 x_i を決定するものとする．

$$\text{Minimize } f_i(x_i, x_{-i}) \text{ subject to } x_i \in S_i \qquad (1)$$

以下では，関数 f_i は x_{-i} を固定したとき x_i に関して凸関数であり，集合 S_i は閉凸集合であると仮定する．このとき，すべてのプレイヤーの戦略 $x^* := (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ が

$$x_i^* \in \operatorname*{argmin}_{x_i \in S_i} f_i(x_i, x_{-i}^*) \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (2)$$

を満たすとき，x^* をゲーム (1) の Nash 均衡点 [2] という．

Nash 均衡点は，各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略を正確に推定でき，自分のコスト関数を正確に計算できるときに意味をもつ．しかし，実際には他のプレイヤーの戦略が正確に推定できなかったり，コスト関数には不確かさや誤差が含まれたりするため，(2) を満たす Nash 均衡点が現実の均衡状態を表しているとは言い難い．そこで本研究では，(1) の最小化問題に対するロバスト最適解 [3] によって定義されるロバスト Nash 均衡という概念を導入する．特に，適当な条件の下でゲーム (1) にロバスト Nash 均衡点が存在することを示す．また，ゲーム (1) が双行列ゲームであるとき，ロバスト Nash 均衡点を求める問題が二次錐相補性問題として定式化できることを示す．

2　ロバスト均衡点とその存在

各プレイヤー i $(i = 1, \ldots, m)$ は次のような行動を取るものとする．プレイヤー i は，他のプレイヤーの戦略 x_{-i} と自分のコスト関数 f_i を推定するが，これらの推定は不確実であり，他のプレイヤーの真の戦略は集合 $x_{-i} + D_{-i}^x$ の中に，自分の真のコスト関数は集合 $f_i + D_i^f$ の中にあることを知っているものとする．ここで，D_{-i}^x はプレイヤー i が推定したプレイヤー j の戦略の不確かさを示す集合 $D_{j,i}^x \subseteq \Re^{n_j}$ を用いて $D_{-i}^x := D_{1,i}^x \times \cdots \times D_{i-1,i}^x \times D_{i+1,i}^x \times \cdots \times D_{m,i}^x$ と定義される集合である．また，D_i^f は $\Re^{n_1} \times \cdots \times \Re^{n_m}$ 上で定義された連続な実数値関数を要素にもつ集合である．このとき，プレイヤー i は起こりうる最悪の場合のコストを最小にすることを考える．すなわち，プレイヤー i は

$$\tilde{f}_i(x) := \max \left\{ (f_i + \delta f_i)(x_i, x_{-i} + \delta x_{-i}) \,\middle|\, \delta f_i \in D_i^f, \delta x_{-i} \in D_{-i}^x \right\} \qquad (3)$$

で定義されるコスト関数 $\tilde{f}_i : \Re^{n_1} \times \cdots \times \Re^{n_m} \to \Re$ を最小化する問題

$$\text{Minimize } \tilde{f}_i(x_i, x_{-i}) \text{ subject to } x_i \in S_i \qquad (4)$$

を解き，自分の戦略 x_i を決定するものとする．このとき，すべてのプレイヤーの戦略がロバスト化されたゲーム (4) の Nash 均衡点になっているならば，これをゲーム (1) に対する**ロバスト Nash 均衡点**という．

以下では集合 D_{-i}^x と D_i^f に対して次の仮定を行う．

仮定 A すべての $i \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，D_{-i}^x は空でないコンパクト集合であり，D_i^f のすべての要素は x_{-i} を固定したとき x_i に関して凸関数となるような連続関数である．また，任意の x に対して (3) の右辺の max を達成するような $\delta f_i \in D_i^f$ と $\delta x_{-i} \in D_{-i}^x$ が存在する．

このとき，(3) で定義される関数 $\tilde{f}$ が x_i に対して凸関数となることが分かる．さらに，この仮定の下で [1, Theorem 15.5.1] を用いることにより，ロバスト Nash 均衡点の存在を証明できる．

定理 1 D_{-i}^x および D_i^f に関して仮定 A が成り立つものとする．また，各 i に対して S_i は空でないコンパクト凸集合であるとする．このとき，ゲーム (4) は *Nash* 均衡点をもつ．すなわち，ゲーム (1) はロバスト *Nash* 均衡点をもつ．

3　双行列ゲームのロバスト均衡点

本節では，ゲーム (1) の特別なケースとして，二人のプレイヤーによる双行列ゲームのロバスト Nash 均衡点を考える．プレイヤー i $(i = 1, 2)$ は相手の戦略が $x_{-i} \in \Re^{n_{-i}}$ ($-i$ は，$i = 1$ であるときは 2 を，$i = 2$ であるときは 1 を表すものとする) であり，自分のコスト関数がコスト行列 $A_i \in \Re^{n_i \times n_{-i}}$ を用いて $f_i(x_i, x_{-i}) = x_i^T A_i x_{-i}$ で与えられると推定している．ここで，x_i は

混合戦略，つまり $e^T x_i = 1, x_i \geq 0$ を満たす．ただし，e はすべての成分が 1 であるようなベクトルである．さらに，自分の真のコスト行列は集合 $A_i + D_i^A$ の中に，相手の真の戦略は集合 $x_{-i} + D_{-i}^x$ の中に含まれている．このとき，各プレイヤー i は次の最小化問題を解いて行動を決定する．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\max_{\delta A_i \in D_i^A,\, \delta x_{-i} \in D_{-i}^x} x_i^T (A_i + \delta A_i)(x_{-i} + \delta x_{-i}) \\ \text{subject to} & e^T x_i = 1,\ x_i \geq 0 \end{array} \quad (5)$$

ここで，集合 $D_i^A, D_{-i}^x\ (i = 1,2)$ がコンパクトならば，集合 D_{-i}^x および $D_i^f := \{\delta f_i \mid \delta f_i(x_i, x_{-i}) = x_i^T(\delta A_i)x_{-i},\, \delta A_i \in D_i^A\}$ は仮定 A を満たす．さらに，各プレイヤーの混合戦略の集合は空でないコンパクト凸集合であるため，定理 1 より双行列ゲームのロバスト Nash 均衡点は必ず存在する．

次に，双行列ゲームのロバスト Nash 均衡点を求める問題が，二次錐相補性問題 (Second-Order Cone Complementarity Problem : SOCCP) に帰着できることを示す．二次錐相補性問題とは，与えられた関数 $F : \Re^n \to \Re^n$ に対して，以下の条件を満たすような $z \in \Re^n$ を求める問題である．

$$z \in \mathcal{K},\ F(z) \in \mathcal{K},\ z^T F(z) = 0 \quad (6)$$

ここで，$\mathcal{K}$ は n_j 次の二次錐 $\mathcal{K}^{n_j} = \{(z_1, z_2) \in \Re \times \Re^{n_j - 1} \mid \|z_2\|_2 \leq z_1\}$ を用いて $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{n_1} \times \mathcal{K}^{n_2} \times \cdots \times \mathcal{K}^{n_m}$ で定義される凸錐である．ただし，$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ である．なお，二次錐相補性問題は [4] などで提案された手法を用いることによって，効率的に解を得ることができる．

まず，相手の戦略の推定値のみに不確定性が含まれる場合，つまり $D_i^A = \{O\}$, $D_{-i}^x := \{\delta x_{-i} \in \Re^{n_{-i}} \mid \|\delta x_{-i}\| \leq \rho_{-i},\ e^T \delta x_{-i} = 0\}$ $(i = 1,2)$ の場合を考える．ただし，ρ_{-i} は与えられた正定数であり，条件 $e^T \delta x_{-i} = 0$ は $e^T x_{-i} = 1$ より $e^T(x_{-i} + \delta x_{-i}) = 1$ が成り立つように設けられている．さて，ベクトル $A_i^T x_i \in \Re^{n_{-i}}$ の平面 $\pi := \{z \in \Re^{n_{-i}} \mid e^T z = 0\}$ 上への射影が $(I - n_{-i}^{-1} ee^T) A_i^T x_i$ と表されることに注意すると，

$$\max_{\delta x_{-i} \in D_{-i}^x} x_i^T A_i \delta x_{-i} = \rho_{-i} \left\| (I - n_{-i}^{-1} ee^T) A_i^T x_i \right\|$$

を得る．ここで，$\tilde{A}_i := A_i(I - n_{-i}^{-1} ee^T) \in \Re^{n_i \times n_{-i}}$ とおき，補助変数 $s_i \in \Re$ を導入すると，最小化問題 (5) は (s_i, x_i) を変数とする次の最小化問題に書き換えることができる．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & (A_i x_{-i})^T x_i + s_i \\ \text{subject to} & \rho_{-i} \|\tilde{A}_i^T x_i\| \leq s_i,\ e^T x_i = 1,\ x_i \geq 0 \end{array} \quad (7)$$

最小化問題 (7) は (s_i, x_i) に対する等式制約付きの二次錐計画問題となっているため，その KKT 条件は二次錐相補性問題で表される．さらに，ロバスト Nash 均衡点を求めるには，$i = 1,2$ の各々に対する問題 (7) の KKT 条件を同時に満たす点を求めればよい．このような点を求める問題は，関数 F が線形であるような二次錐相補性問題 (6) に帰着される．

次にコスト行列 $A_i\ (i = 1,2)$ のみに不確実性が含まれる場合を考える．ここでは特に，不確かさが A_i の各行ごとに独立な場合を考える．すなわち，与えられた正定数ベクトル $\xi_i \in \Re^{n_{-i}}$ に対して，A_i と x_{-i} の不確かさを表す集合が $D_i^A := \{\delta A_i \mid \|(\delta A_i)_j\| \leq (\xi_i)_j\ (j = 1, \ldots, n_{-i})\}$ と $D_{-i}^x = \{0\}$ で与えられているものとする．ただし，$(\delta A_i)_j$ は行列 δA_i の列ベクトル，$(\xi_i)_j$ はベクトル ξ_i の第 j 成分を表す．このとき，

$$\max_{\delta A_i \in D_i^A} x_i^T (A_i + \delta A_i) x_{-i} = x_i^T A_i x_{-i} + (\xi_i^T x_{-i}) \|x_i\|$$

であるので，最小化問題 (5) は補助変数 s_i を用いて以下のように書き換えることができる．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_i^T A_i x_{-i} + (\xi_i^T x_{-i}) s_i \\ \text{subject to} & \|x_i\| \leq s_i,\ x_i \geq 0,\ e^T x_i = 1. \end{array} \quad (8)$$

上の最小化問題は (s_i, x_i) に対する等式制約付きの二次錐計画問題となっているため，その KKT 条件は二次錐相補性問題で表される．さらに，$i = 1,2$ の各々に対する問題 (8) の KKT 条件を一つにまとめると，関数 F が線形であるような二次錐相補性問題 (6) に帰着される．

4 まとめ

本研究では，m 人のプレイヤーによる非協力ゲームに対してロバスト Nash 均衡点を定義し，適当な仮定の下でそのような均衡点が存在することを示した．さらに，それらの特別なケースである双行列ゲームに対して，ロバスト Nash 均衡点を求める問題が二次錐相補性問題に帰着できることを示した．なお，[4] で提案されたアルゴリズムを用いて計算実験を行ったが，その内容については当日の発表で紹介する予定である．

また，今後の課題としては，Nash 均衡点とロバスト Nash 均衡点の関係に対して理論的な考察を行うことや，不確実性の構造がより複雑な場合に対してモデルの一般化を行うことなどが挙げられる．

参考文献

[1] J.-P. Aubin. *Applied Functional Analysis.* Wiley-Interscience, New York, 1979.

[2] J.-P. Aubin. *Mathematical Methods of Game and Economic Theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1979.

[3] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23:769–805, 1998.

[4] S. Hayashi, N. Yamashita, and M. Fukushima. A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems. Technical Report 2003-002, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, January 2003.