日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

複雑なデータ構造を用いない2部グラフの辺彩色アルゴリズム

02301850　高知学園短期大学　高畑貴志　TAKABATAKE Takashi

1　はじめに

2部グラフの辺彩色問題は, スケジューリングなどの応用を持つ, 基礎的な組合せ最適化問題である. 辺数 m 最大次数 d を持つ2部グラフに対する $O(m\log d)$ 時間のアルゴリズムが, 研究者の長い間の目標であった. この目標に向かって, Schrijver [6] や Rizzi [5] 等により $O(md)$, $O(m\log d+\frac{m}{d}\log\frac{m}{d}\log d)$ 時間のもの等が提案されてきたが, Cole–Ost–Schirra [2] がスプレー木を用いた閉路消去アルゴリズムで目標を達成した. これらの結果は正則2部グラフの完全マッチングアルゴリズムから導かれるものであるが, Alon [1] は素朴な完全マッチングアルゴリズムからもそれなりに高速な — $O(m\log m)$ — アルゴリズムが導かれること示した. この発表では, Makino–Takabatake–Fujishige [4] による完全マッチングアルゴリズムをもとにした, スプレー木などの複雑なデータ構造を用いないで実装できる $O(m\log d+\frac{m}{d}\log\frac{m}{d})$ 時間アルゴリズムを提案する.

2　既知の結果

以下では, m 本の辺を持ち, 最大次数 d の2部グラフを対象とした辺彩色問題を, 単に辺彩色問題と呼ぶので注意されたい.

辺彩色問題では, 頂点数 $n=O(\frac{m}{d})$ と仮定してよい. 彩色指数は最大次数に一致することが知られているため, 二つの色クラス中で次数が $d/2$ 以下の頂点をそれぞれ併合した2部グラフの問題に帰着できるからである.

Kapoor–Rizzi [3] は, $0<k\leq d$ を満たす任意の k について, 頂点数 $O(\frac{m}{d})$ の k-正則2部グラフの完全マッチングが, T 時間で求められるならば, $T+O(m\log d)$ 時間で辺彩色問題が解けることを示した.

以下, 正則2部グラフの完全マッチングを求める問題では, 次数は奇数と仮定する. 偶数次数の場合は, グラフの辺をオイラー閉路の集合に分割し, 各閉路の辺を交互に赤と黒に割り当て, 各色の辺だけを集めてできる2つのグラフ (この方法でグラフを2分割することを, ここではオイラースプリットと呼ぶ.) の一方を残すことで, 次数が半分の正則2部グラフでの問題に帰着できるからである.

辺数 m の k-正則2部グラフの完全マッチング問題を, 辺数の少ない重み付き正則2部グラフの問題に帰着させる手法が知られている. この手法を辺疎化と呼ぶ. 辺疎化の手順は次の通りである.

(1) $H_{-1}=G$ とする.
(2) 各 $\ell=0,\ldots,\lfloor\log k\rfloor$ について,
- (2-i) 2部グラフ H_ℓ の頂点集合を $H_{\ell-1}$ と同じに, 辺集合は空集合に設定する.
- (2-ii) $H_{\ell-1}$ の辺集合を, オイラー閉路の集合と木 T に分割する.
- (2-iv) T を $H_{\ell-1}$ の辺集合にする.
- (2-v) 残った各オイラー閉路の辺を交互に赤と黒に割り当て, 赤の辺のみを H_ℓ の辺集合にする.

(3) 各 H_ℓ の辺の重みを 2^ℓ と定める.

辺疎化は, $O(m)$ 時間で実行でき, 重みつきグラフの場合は, 個別の辺の総数に比例した時間で実行できる. 重みつきの木となる H_ℓ $(\ell=0,\ldots,\lfloor\log k\rfloor)$ を重ね合わせてできる重みつき k-正則グラフのマッチングは, もとのグラフの完全マッチングとなる.

Makino–Takabatake–Fujishige [4] は, 与えられた正則2部グラフ $G=(V,E)$ に, E には含まれないダミー辺を用いたマッチングのコピーを加えて次数を2のべき乗にした後, オイラースプリットを繰り返して完全マッチングを求めるアルゴリズム BITWISE-ADD-SPLIT (以下, BAS) を提案した.

Algorithm BITWISE-ADD-SPLIT

Input d-正則グラフ $G=(V,E)$ (d:奇数).

Output G の完全マッチング M.

Step 1 G を辺疎化し, $H_0,\ldots,H_{\lfloor\log d\rfloor}$ を得る. (このアルゴリズムでは, 各 H_ℓ の辺の重みを考えない.)

Step 2 $c=2^{\lceil\log d\rceil}-d$ とする.

Step 3 完全2部グラフ $K_{|V|/2,|V|/2}$ の任意の完全マッチングを M_d とする.

Step 3 M_d がダミー辺を含まなければ, Step 6 へ.
Step 4 $R_0 = \emptyset$ とする.

for $\ell = 0, \ldots, \lfloor \log d \rfloor$ do

if "c の 2 進表現の 2^ℓ の桁 1"=1 then
R_ℓ に M_d を加える.
R_ℓ を H_ℓ に加え, オイラースプリットを適用する. 得られるグラフでダミー辺の少ない方の辺集合を, $R_{\ell+1}$ とする.

Step 5 $M_d = R_{\lceil \log d \rceil}$ とし, Step 3 へ.
Step 6 M_d を返し, 終了.

BAS は, Step 2 に $O(|E|)$ 時間かかり, Step 4 は $O(|V| \log d)$ 時間必要で $O(\log |V|)$ 回反復されるため, $O(|E| + |V| \log |V| \log |E|)$ 時間で完全マッチングを求める. [3] より, $O(m \log d + \frac{m}{d} \log \frac{m}{d} \log d)$ 時間の辺彩色アルゴリズムが得られる.

3 新しいアルゴリズム

BAS では, c が小さければ Step 4 を実行する回数が減少する. オイラーの小定理によると, 正の奇数 d に対し, 整数 x, t で, $xd + 1 = 2^t$ かつ $t \leq d$ を満たすものが存在することがわかる. これを利用して, 辺彩色をするべきグラフのコピーを複数個重ね, ダミーのマッチングを 1 回だけ加えるようにして BAS を修正すると, 次の AUGMENT-BITWISE-ADD-SPLIT (以下, ABAS) が得られる.

Algorithm AUGMENT-BITWISE-ADD-SPLIT
Input d-正則グラフ $G = (V, E)$ (d:奇数).
Output G の完全マッチング M.
Step 1 G を辺疎化し, $H_0, \ldots, H_{\lfloor \log d \rfloor}$ を得る. (各 H_ℓ の重みは 2^ℓ とする.)
Step 2 $xd + 1 = 2^t$ かつ $d \leq t < 2d$ となる整数 x, t を求める.
Step 3 各 H_ℓ の重みを x 倍して重ね合わせた xd-正則グラフに辺疎化を適用する. 得られる重み付きの木を $T_0, \ldots, T_{t-1}$ とする. これ以降, 各 T_ℓ の重みは考えない.
Step 4 完全 2 部グラフ $K_{|V|/2, |V|/2}$ の任意の完全マッチングを M_d とする.
Step 5 M_d がダミー辺を含まなければ, Step 8 へ.
Step 6 $R = M_d$ とする.

for $\ell = 0, \ldots, t-1$ do

T_ℓ に R を加えたグラフに, オイラースプリットを適用する. 得られるグラフでダミー辺の少ない方の辺集合を R とする.

Step 7 $M_d = R$ とし, Step 5 へ.
Step 8 M_d を返し, 終了.

Step 6〜7 は $O(d|V| \log d)$ 時間で, M_d に含まれるダミー辺数を $1/2^d$ 以下にする. Step 4 では M_d は $O(|V|)$ のダミー辺を含むので, Step 6 は $O(\frac{1}{d} \log |V|)$ 回繰り返される. Step 3 の辺疎化では, $O(|V| \log d)$ 本の個別の辺を持つグラフについて, 全辺の探索を行う操作を d 回繰り返すので, $O(d|V| \log d) = O(|E| \log d)$ 時間必要である. したがって, ABAS は, $O(|E| \log d + |V| \log |V|)$ 時間の完全マッチングアルゴリズムであるが, $O(m \log d + \frac{m}{d} \log \frac{m}{d})$ 時間の辺彩色アルゴリズムを与える.

参考文献

[1] N. Alon, A simple algorithm for edge-coloring bipartite multigraphs, Inform. Process. Lett., 85, 301–302 (2003).

[2] R. Cole, K. Ost, S. Schirra, Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \log D)$ time, Combinatorica, 21, 5–12 (2001).

[3] A. Kapoor, R. Rizzi, Edge-coloring bipartite graphs, J. Algorithms, 34, 390-396 (2000).

[4] K. Makino, T. Takabatake, S. Fujishige, A simple matching algorithm for regular bipartite graphs, Inform. Process. Lett., 84, 189–193 (2002).

[5] R. Rizzi, Finding 1-factors in bipartite regular graphs and edge-coloring bipartite graphs, SIAM J. Discrete Math., 15, 283–288 (2002).

[6] A. Schrijver, Bipartite edge coloring in $O(m\Delta)$ time, SIAM J. Comput., 28, 841–846 (1998).