日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年春季研究発表会

ラミナー被覆制約を持つ単調凹関数最小化問題

大阪大学 ＊坂下 麻里子 SAKASHITA Mariko
01605984 大阪大学 牧野 和久 MAKINO Kazuhisa
01502254 京都大学 藤重 悟 FUJISHIGE Satoru

1 序論

V を $|V|=n$ である有限の集合とする．V の部分集合族 $\mathcal{F}\subseteq 2^V$ は，任意の集合 $X,Y\in\mathcal{F}$ に対して，

$$X\cap Y=\emptyset,\ X\subseteq Y,\ X\supseteq Y$$

のいずれかが成立するとき，ラミナー (laminar) 族と呼ばれる．本研究では，ラミナー族 $\mathcal{F}\subseteq 2^V$，ラミナー族 $\mathcal{F}$ 上の要求関数 $d:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$，コストを表す単調凹関数 $F:\mathbb{R}_+^V\to\mathbb{R}_+$ が与えられたとき，以下に記述されるラミナー被覆制約を持つ凹関数最小化問題を扱う．

$$\begin{array}{lll} (\mathbb{P}) & \text{Minimize} & F(x) \\ & \text{subject to} & x(X)\ge d(X) \quad (X\in\mathcal{F}) \\ & & x(v)\ge 0 \qquad (v\in V) \end{array}$$

ただし，$\mathbb{R}_+$ は非負実数の集合，$x(X)=\sum_{v\in X}x(v)$ とする．

この問題 $(\mathbb{P})$ に対しては，会社などの組織の階層構造がラミナー族によって表現できることから分かるように，様々な応用が考えられる．また，一見するとラミナー構造を持たない問題でも問題 $(\mathbb{P})$ として定式化可能なものがある．例えば，需要量が一定である無向ネットワークにおけるフローに基づく施設配置問題 [1, 5, 6]，枝連結度増大問題 [2, 4] が挙げられる．

本研究ではコスト関数 F が一般の単調凹関数である場合に加えて，以下のように記述できる場合について考察する．

$$F_1(x) = \sum_{X\in\mathcal{F}} f_{\Delta X}(x[\Delta X]). \tag{1}$$

$$F_2(x) = \sum_{v\in V} f_v(x(v)). \tag{2}$$

$$F_3(x) = \sum_{v\in V: x(v)>0} (a_v x(v)+b_v). \tag{3}$$

ただし，$\Delta X=X-\bigcup_{Y\in\mathcal{F}:Y\subset X}Y$，$f_{\Delta X}$ は ΔX 上の非負単調凹関数，$x[\Delta X]$ は変数 x の ΔX 上への制限，f_v は 1 変数の非負単調凹関数，a_v, b_v は非負定数とする．定義から明らかに，F_1 の特殊形が F_2 であり，さらに F_2 の特殊形が F_3 である．

2 本論文での成果

F のオラクルとは，任意の $x\in\mathbb{R}_+^V$ に対して，その関数値 $F(x)$ を出力するものであり，F がオラクルで与えられるかどうかに関わらず，$x\in\mathbb{R}_+^V$ から $F(x)$ を得るための計算量を $O(q)$ とする．

定理 1．コスト関数 F が式 (1) で与えられるとき，問題 $(\mathbb{P})$ は $O(n^2q)$ 時間で解くことができる． □

定理 2．コスト関数 F が式 (2) で記述できる場合でも F がオラクルとして与えられるならば，問題 $(\mathbb{P})$ を解くために $\Omega(n^2q)$ 時間必要である． □

定理 1，2 から式 (1) で記述されるコスト関数 F がオラクルで与えられるときは，定理 1 に示されるアルゴリズムが最適となる．

また，定理 1 と [3, 4] の結果を用いることにより，序論で述べた施設配置問題，枝連結度増大問題も効率的に解ける．

系 1．需要量が一様である無向ネットワーク $\mathcal{N}$ のフローに基づく施設配置問題は，コスト関数が式 (1) で表されるとき，$O(nm+n^2(q+\log n))$ 時間で解ける．ただし，n,m はそれぞれ $\mathcal{N}$ の点数と枝数を示す． □

系 2．要求量が一様である無向ネットワーク $\mathcal{N}$ の枝連結度増大問題は，コスト関数が式 (1) で表されるとき，$O(nm+n^2(q+\log n))$ 時間で解ける． □

F が式 (3) で与えられるときには，以下のように高速に解ける．

定理 3．F が式 (3) で表されるとき，問題 $(\mathbb{P})$ は $O(n\log^2 n)$ 時間で解くことができる．また F がオラクルとして与えられる場合でも，$O(n(\log^2 n+q))$ 時間で解くことができる． □

さらに，目的関数 F が一般の単調凹関数のときは，次の否定的な結果を得る．

定理 4．目的関数 F が一般の単調凹関数のとき，
(I) F がオラクルとして与えられるとき，問題 $(\mathbb{P})$ を解くためには $\Omega(2^{\frac{n}{2}}q)$ 時間必要である．
(II) F が明示的に与えられるときでも，問題 $(\mathbb{P})$ は NP 困難である． □

以下，まとめた結果を表 1 に示す．

表 1: 本研究で得られた成果

	F_1	F_2	F_3	一般
明示的	$O(n^2q)$	$O(n^2q)$	$O(n\log^2 n)$	NP 困難
オラクル	$\Theta(n^2q)$	$\Theta(n^2q)$	$O(n(\log^2 n+q))$	$\Omega(2^{\frac{n}{2}}q)$

本論文では，頁数制限のため，定理 1 の略証のみを記す．

3 定理 1 の略証

ラミナー族 $\mathcal{F}$ は，その構造から木表現 $T=(W,A)$ を持つ．ただし，点集合 W は $X_i\in\mathcal{F}$ に対応する点 w_i と根となる点 w_{i_0} から成り，枝集合 A は以下の (i)(ii) の

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

枝から成る．

(i) $(w_i, w_j) \in A : X_i \subsetneq X_j$, かつ, $X_i \subsetneq Y \subsetneq X_j$ である $Y \in \mathcal{F}$ が存在しないとき

(ii) $(w_i, w_{i_0}) \in A : X_i$ が $\mathcal{F}$ において極大集合のとき

この木表現 T に基づき、集合 $X_i \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{S}(X_i) = \{X_j \mid (w_j, w_i) \in A\}$ を X_i の子集合族と呼ぶ．また，関数 $d : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ に対して，差分 Δd を $\Delta d(X) = d(X) - \sum_{Y \in \mathcal{S}(X)} d(Y)$ により定義する．$W^* = \{w_i \mid X_i \in \mathcal{F}\}$ に対して，$\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_k\} \subseteq 2^{W^*}$ は，次を満たすとき，W^* のパス分割と呼ばれる．

- $\bigcup_{i=1}^k P_i = W^*$，かつ，$i \neq j$ ならば $P_i \cap P_j \neq \emptyset$．
- 各 P_j が $T = (W, A)$ 上の有向パス $w_{j_0} \to \cdots \to w_{j_{r_j}}$ であり，$\Delta X_{j_0} \neq \emptyset$．

このとき，次のような構造的性質を持つ最適解が存在することが分かる．

補題1． F が式 (1) のように分離可能なとき，W^* のパス分割 $\mathcal{P} = \{P_1, \cdots, P_k\}$ $(v_j \in \Delta X_{j_0})$ に基づく次のような最適解 x^* が存在する．

$$x^*(t) = \begin{cases} \sum_{w_i \in P_j} \Delta d(X_i) & (t = v_j, j = 1, \cdots, k) \\ 0 & (t \in V - \{v_j \mid j = 1, \cdots, k\}). \end{cases}$$

□

以下では，補題1に示される構造的性質を持つ最適解を求めるアルゴリズムを構成する．

任意の $X \in \mathcal{F}$ に対して，対応する $w \in W$ から根 w_{i_0} までの有向パスを $w_{j_0} (= w), w_{j_1}, \cdots, w_{j_{h(X)-1}}, w_{j_{h(X)}} (= w_{i_0})$ とする．この $X \in \mathcal{F}$ と整数 $k \, (0 \leq k \leq h(X) - 1)$ に対して，以下のように定義される問題を考える．ただし，$h(X)$ は木表現 T における w の深さを示す．

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{P}') & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{Y \in \mathcal{F}: Y \subseteq X} f_{\Delta Y}(x[\Delta Y]) \\ & \text{subject to} & x(X) \geq d(X) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \Delta d(X_{j_i}) \\ & & x(Y) \geq d(Y) \qquad (Y \in \mathcal{F},\ Y \subseteq X) \\ & & x(v) \geq 0 \qquad (v \in V) \end{array}$$

補題1より，問題 $(\mathbf{P}')$ が $\{w_i \mid X_i \in \mathcal{F},\ X_i \subseteq X\}$ のパス分割 $\mathcal{P}$ とそれに基づく最適解を持つことが分かる．$X \in \mathcal{F}$ と $k = 0, \cdots, h(X) - 1$ に対して，$\alpha_X(k)$ は $(\mathbf{P}')$ の最適値，$\beta_X(k)$ は補題1中の点 w を含む集合 $P_j \in \mathcal{P}$ に対する $v_j \in \Delta X_{j_0}$ を与える．以下ではこの α_X, β_X の計算法を考える．

T の葉，すなわち極小な $X \in \mathcal{F}$ においては，

$$(\alpha_X(k), \beta_X(k)) = \left(\min_{v \in X} f_X(z_v^k),\ \arg\min_{v \in X} f_X(z_v^k) \right) \quad (4)$$

となる．ただし，$z_v^k(t) = \sum_{i=0}^k \Delta d(X_{j_i}) \ (t = v), 0$ (それ以外) である．また，$\arg\min_{v \in X} f_X(z_v^k)$ とは $f_X(z_{v^*}^k) = \min_{v \in X} f_X(z_v^k)$ となるような $v^* \in X$ のことである．

極小でない $X \in \mathcal{F}$ については，補題1より

$$\alpha_X(k) = \min \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\min_{v \in \Delta X} \left\{ f_{\Delta X}(z_v^k) + \sum_{Y \in \mathcal{S}(X)} \alpha_Y(0) \right\}, \\ \displaystyle\min_{Y \in \mathcal{S}(X)} \left\{ \alpha_Y(k+1) + \sum_{\substack{Z \in \mathcal{S}(X): \\ Z \neq Y}} \alpha_Z(0) \right\} \end{array} \right\} \quad (5)$$

$\beta_X(k)$ は，$\alpha_X(k) = f_{\Delta X}(z_v^k) + \sum_{Y \in \mathcal{S}(X)} \alpha_Y(0)$ ならば v，$\alpha_X(k) = \alpha_Y(k+1) + \sum_{Z \in \mathcal{S}(X): Z \neq Y} \alpha_Z(0)$ ならば $\beta_Y(k+1)$ となる．

木表現 T の葉から根に向かい，各 α_X, β_X を順次計算し，最適解を求めるアルゴリズムを以下に示す．

アルゴリズム DP

0． $\tilde{T}(= (\tilde{W}, \tilde{A})) := T$.

1． $\tilde{W} \neq \{w_{i_0}\}$ である限り，$\tilde{T}$ の葉 w を一つ選んで，

(1-I) 対応する $X \in \mathcal{F}$ の α_X, β_X を式 (4),(5) に基づき計算する．

(1-II) $\tilde{W} := \tilde{W} - \{w\}$.

2． $\tilde{T} := T$, $x^*(v) := 0 \, (v \in V)$.

3． $\tilde{W} \neq \{w_{i_0}\}$ である限り，$\tilde{T}$ 上の $Y \in \mathcal{S}(X_{i_0})$ を一つ選ぶ ($\beta_Y(0) \in \Delta X_{j_0}$, $w_{j_0} \to w_{j_1} \to \cdots \to w_{j_{l+1}} (= w_{i_0})$ は $\tilde{T}$ 上の有向パスとする)．

(3-I) $x^*(\beta_Y(0)) := \sum_{i=0}^l \Delta d(X_{j_i})$.

(3-II) $\tilde{T}$ からこの有向パスを除去し，更新する．

4． x^* を出力し，終了する． □

詳しい証明は省略するが，補題1より，このアルゴリズムは，コスト関数 F が式 (1) で与えられるとき，問題 $(\mathbf{P})$ の最適解を $\mathrm{O}(n^2 q)$ 時間で求めることが分かる．

参考文献

[1] K. Arata, S. Iwata, K. Makino, and S. Fujishige: Locating sources to meet flow demands in undirected networks, *J. Algorithms*, **42** (2002), 54-68.

[2] A. Frank: Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM J. Discrete Mathematics*, **5** (1992), 25-53.

[3] H. Nagamochi: Computing extreme sets in graphs and its applications, *Proc. of the 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications* (January 21-24, 2003, Tokyo, Japan) 349-357.

[4] H. Nagamochi and T. Ibaraki: Augmenting edge-connectivity over the entire range in $\tilde{\mathrm{O}}(nm)$ time, *J. Algorithms*, **30** (1999), 253-301.

[5] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe: Some covering problems in location theory on flow networks, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **E75-A** (1992), 678-683.

[6] 田村, 菅原, 仙石, 篠田: 無向フローネットワークにおける総合被覆問題について, 電子情報通信学会論文誌, **J81-A** (1998), 863-869.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．