Weighted Lattice Graph with Diagonalsに対するマルチカラーリングの線形時間近似解法

01606160 上智大学 *宮本 裕一郎 MIYAMOTO Yuichiro
01605000 東京大学 松井 知己 MATSUI Tomomi

1 はじめに

無向グラフ $H=(V,E)$ と非負整数重み $w:V\rightarrow \mathbb{Z}_+$ が与えられているとき，以下の条件 1.2. を満たす色の割当を**マルチカラーリング**と呼ぶ．1. それぞれの点 v に対して少なくとも $w(v)$ 個の色が割り当てられている．2. 隣接する点は同じ色を共有しない．必要とされる色数が最小となるマルチカラーリングを見つける問題をマルチカラーリング問題と呼ぶ．クリークを構成する点の重みの和をクリークの重みと呼ぶ．(H,w) の最大重みクリークを $\omega(H,w)$ で表す．(H,w) に対する任意のマルチカラーリングにおいて，必要とされる色数は明らかに $\omega(H,w)$ 以上である．

P を 2 次元整数格子点の部分集合とする．すなわち $P \stackrel{\text{def.}}{=} \{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\subseteq \mathbb{Z}^2$ とする．ここで m,n は与えられた正整数とする．点集合を P とし，ユークリッド距離が $\sqrt{2}$ 以下の点対を枝とする無向グラフを G_P とする．グラフの各点に非負整数重み $w:V\rightarrow \mathbb{Z}_+$ が与えられているとき (G_P,w) を Weighted Lattice Graph with Diagonals と呼び WLGD で略記する．本稿では，WLGD に対するマルチカラーリング問題を扱う．

マルチカラーリング問題は様々な場面で現れる．チャネル (周波数) 割当問題の一つのモデル化として，三角形格子グラフに対するマルチカラーリングがある．これは NP-困難であることが示されており [4]，精度保証付き近似解法が提案されている [4, 6]．マルチカラーリングはマルチプロセッサのタスクスケジューリングの一つのモデル化としても扱われており，平面グラフや partial k-tree に対する PTAS が開発されている [3]．また，マルチカラーリングの目的関数や制約条件にはいくつかのバリエーションがある [3]．

(H,w) に対して，H の各点を $w(v)$ 個の点からなる完全グラフで置き換えて得られるグラフを $H(w)$ とする．$H(w)$ のカラーリングは (H,w) のマルチカラーリングと同値である．しかし $H(w)$ の入力サイズは (H,w) の擬多項式でしか抑えられない．よって $H(w)$ のカラーリングを用いて (H,w) のマルチカラーリングを得ると計算容量・時間の観点から現実的でない場合もある．

以下，WLGD に対するマルチカラーリング問題は NP-困難であることを示し，精度保証付き線形時間近似解法を提案する．

2 問題の難しさ

定理 1 (G_P,w) が与えられたとき，それが $(4/3)\omega(G_P,w)$ より少ない色でマルチカラーリング可能であるか判定するのは NP-完全である．

証明 (概略): 既に NP-完全であることがわかっている問題を WLGD のマルチカラーリング問題に帰着することで証明する．具体的には「各点の次数が 3 あるいは 4 である平面グラフが 3 彩色可能であるか判定する問題」を「WLGD を 3 色でマルチカラーリング可能であるか判定する問題」に変形する．前者は NP-完全であることが知られている [1]．以下 WLGD を整数行列で表す．ここで，行列の (i,j) 成分は座標 (i,j) の点の重みとする．WLGDL_0,L_1,L_2 を

$$L_0=\begin{bmatrix}00100\\02020\\10001\\02020\\00100\end{bmatrix},L_1=\begin{bmatrix}0001000\\0020200\\1100101\\0000020\\0000000\end{bmatrix},L_2=\begin{bmatrix}0000000\\0000000\\1212121\\0000000\\0000000\end{bmatrix}$$

とする．次数が 3 あるいは 4 の平面グラフを G とする．G の点を L_0 で，枝を L_1 および L_2 を用いて置き換えて得られた WLGD を G' とする．グラフ L_0 を 3 色でマルチカラーリングするならば点 $(3,1),(1,3),(5,3),(3,5)$ は全て同じ色でなければならない．グラフ L_1 を 3 色でマルチカラーリングするならば点 $(3,1),(3,7)$ は異なる色でなければならない．グラフ L_2 を 3 色でマルチカラーリングするならば点 $(3,1),(3,7)$ は同じ色でなければならない．よって，G が 3 色でカラーリング可能か判定する問題と G' が 3 色でマルチカラーリングできるか判定する問題は同値である． □

証明の詳細は参考文献 [5] を参照していただきたい．

定理 1 より，WLGD に対するマルチカラーリング問題は NP-困難である．また，P=NP でない限り，近似精度が 4/3 より小さい多項式時間近似解法は存在しないことがわかる．

3 精度保証付き線形時間近似解法

補題 1 点集合が $P = \{1,\ldots,m\} \times \{1,2,3\}$ である *WLGD* のマルチカラーリング問題に対して，計算量 $O(m)$，必要色数 $\omega(G_P, w)$ の厳密解法が存在する．

証明 (概要): 色として自然数を割り当てることとする．奇数 i について点 $(i,2),(i,1),(i,3)$ の順に 0 から貪欲に割り当てる．偶数 i について点 $(i,2),(i,1),(i,3)$ の順に $\omega(G_P, w)$ から貪欲に割り当てる． ∎

補題より以下の系が直ちに成り立つ．

系 1 $P = \{1,\ldots,m\} \times \{1,2,3\}$ ならば，無向グラフ $G_P(w)$ は**パーフェクト**である．

なお，一般のパーフェクトグラフに対するカラーリングの最適解を求める多項式時間解法の存在が知られているが，それは楕円体法によるものである [2]．

近似解法は補題 1 の性質を用いて構築する．本稿では簡単のため，点重みが全て 3 の倍数である場合について説明する．

近似解法 入力は (G_P, w)

ステップ 1 新たに 4 つの重み w'_0, w'_1, w'_2, w'_3 を

$$w'_k(x,y) = \begin{cases} 0, & y = k \pmod 4, \\ w(x,y)/3, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定める．

ステップ 2 $(G_P, w'_0), (G_P, w'_1), (G_P, w'_2), (G_P, w'_3)$ のマルチカラーリングを得る．

ステップ 3 ステップ 2 で得られたマルチカラーリングをあわせて (G_P, w) のマルチカラーリングを構築する．

上記の近似解法のステップ 2 は補題 1 より線形時間で終了する．また，w'_k の定義より明らかに $\omega(G_P, w'_k) = \omega(G_P, w)/3$ である．これより上記近似解法の近似率は 4/3 である．また，計算量は $O(mn)$ である．

点重みが 3 の倍数でない場合にも適切に w'_k を定めることにより，近似解法を構築できる．このとき計算量は変わらないが，必要な色数は最大で $(4/3)\omega(G_P, w) + 4$ になる．詳しくは参考文献 [5] を参照していただきたい．

4 おわりに

本稿では，WLGD に対するマルチカラーリング問題が NP-困難であることを示し，精度保証付き近似解法を提案した．本稿で提案した近似解法は三角格子グラフにも適用可能な汎用性の高い手法である．

参考文献

[1] M. R. Garey and D. S. Johnson: *Computers and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness* (W. H. Freeman and Company, 1979).

[2] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization* (Springer-Verlag, 1988).

[3] M. M. Halldórsson and G. Kortsarz: Tools for Multicoloring with Applications to Planar Graphs and Partial k-Trees. *Journal of Algorithms*, **42** (2002) 334–366.

[4] C. McDiarmid and B. Reed: Channel Assignment and Weighted Coloring. *Networks*, **36** (2000) 114–117.

[5] Y. Miyamoto and T. Matsui: Linear Time Approximation Algorithm for Multicoloring Latttice Graphs with Diagonals, *Technical Report*, **METR 2003-34** (2003).

[6] L. Narayanan and S. M. Shende: Static Frequency Assignment in Cellular Networks. *Algorithmica*, **29** (2001) 396–409.