マルチンゲール変換を用いたアメリカンオプション価格の上限評価

02005250　東京工業大学 上園 智大 UEZONO Tomohiro
01302440　東京工業大学 高橋 幸雄 TAKAHASHI Yukio

1　はじめに

オプションの公正価格を求める要求は大きいが、アメリカンオプションは解析が難しく、これまで適当な方法が知られていなかった。Rogersは、マルチンゲールを変数とする一種のmin-max問題として解く斬新な手法を提案したが、彼の手法を適用するには適切なマルチンゲール過程を構成する必要があり、これは一般的に難しい。本論では離散化モデルにおいて、原資産のマルチンゲール変換で与えられるマルチンゲールに制限した上で、1、2時点先が最適となるマルチンゲールを逐次的に生成することにより、価格の良い上限を求める方法を提案する。これは、精度の良い解を少ない計算時間で求めるだけでなく、オプションヘッジという観点からも意味のある価格付けをすることが数値的に確かめられる。

2　Rogersによる上限評価

確率空間を$(\Omega,\mathcal{F},P)$とする。フィルトレーション$\{\mathcal{F}_t\}$を、リスク中立測度Pの下での標準ブラウン運動$\{W_t\}$を用い、$\sigma\{W_s : s\le t\}$を完備化したものとして定義する。また、オプション満期をT、短期金利をr、ボラティリティーをσとする。株価過程Sを$dS_t=S_t(rdt+\sigma dW_t)$、R値ペイオフ関数を$\psi$、割引き内在価値過程$Z$を$Z_t=e^{-rt}\psi(S_t,t)$として定義する。ただし、技術上の理由から、ある$p>1$に対して$\sup_{0\le t\le T}|Z_t|\in L^p$であるものとする。

Rogers[1]はアメリカンオプションの価格Y_0が以下のように表現されることを示した。

定理

$$Y_0=\inf_{M\in H_0^1}E[\sup_{0\le t\le T}(Z_t-M_t)] \quad (1)$$

ただしH_0^1は、$\sup_{0\le t\le T}|M_t|\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$かつ$M_0=0$を満たすようなマルチンゲール$M=\{M_t\}$の空間である。

3　マルチンゲールの生成方法

Rogersの手法は、下限を与えるマルチンゲール過程がわかれば、モンテカルロ法を繰り返し用いることでアメリカンオプション価格が推定できる利点を持つ。しかし、このマルチンゲール過程は実際にはわからない。本論ではまず(1)式を離散化し、ある有界かつ可予測な過程$\{\theta_n\}$による、割引いた原資産のマルチンゲール変換によって生成されるマルチンゲールの空間の中で下限を求めることにより、(1)式の近似解を求めることを試みる。このマルチンゲールの空間(以後MTと記す)は元の空間より狭いため(図1)、この問題の解はアメリカンオプション価格の1つの上限を与えることしかできないが、原資産のマルチンゲール変換で与えられるマルチンゲールは「実際の市場で構成しうるヘッジ戦略」を示唆するため、H_0^1の下限で得られる価格よりもある意味で好ましい価格になっているとも考えられる。

新たな離散の確率空間$(\tilde{\Omega},\mathcal{G},Q)$を考え、フィルトレーションを$\mathcal{G}_n=\sigma\{S_0,S_1,\cdots,S_n\}$と定義する。ここで、$S,Z,M$の離散化は次のようになされる。$0\le n\le N$に対して、

$$\begin{aligned}
\Delta t &= T/N \quad N\text{は時間の分割数} \\
S_n &= S_{n-1}+rS_{n-1}\Delta t+\sigma S_{n-1}\sqrt{\Delta t}\epsilon_n \quad (2)\\
\bar{S}_n &= (1+r\Delta t)^{-n}S_n \quad (3)\\
Z_n &= (1+r\Delta t)^{-n}\psi(S_n,n\Delta t) \quad (4)\\
M_n &= \sum_{m=1}^{n}\theta_m(\bar{S}_m-\bar{S}_{m-1}) \quad (5)\\
\epsilon_n &\overset{iid}{\sim} N(0,1), \quad (6)
\end{aligned}$$

これらの式からY_0を次のように評価できる。

$$Y_0<\min_{\theta\in\Theta}E[\max_{0\le n\le N}(Z_n-\sum_{m=1}^{n}\theta_m(\bar{S}_m-\bar{S}_{m-1}))] \quad (7)$$

ただしΘは、有界かつ可予測な過程の集合を表す。

4　プレーンなアメリカンプットオプションの評価方法

$\psi(S_n,n\Delta t)=(K-S_n)^+$というペイオフを持つオプションを考える。$Y_0$の上限を求めるために(7)式右辺を

考えることにしたが、実はこれを解くのも困難である。そのため (7) 式をさらに制限し、過去の履歴から 1 時点先の期待値を最小にする θ_n を逐次的に求めることで近似的に解いていくことにする。$0 \leq n \leq N$ に対して、

$$\min_{\theta_n \in (-\infty,\infty)} E[\max_{0 \leq l \leq n}(Z_l - \sum_{m=1}^{l} \theta_m(\bar{S}_m - \bar{S}_{m-1}))|\mathcal{G}_{n-1}] \tag{8}$$

上の S, Z, M の形を用いてさらに変形すると

$$\min_{\theta_n \in (-\infty,\infty)} E[\max\{((A - X_n)^+ - \theta_n X_n - M_{n-1}), D\}|\mathcal{G}_{n-1}] \tag{9}$$

となる。上の変数は $\mathcal{G}_{n-1}$ 上で次のように定義される。

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{\sigma \bar{S}_{n-1}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_n}{1 + r\Delta t} \sim N\left(0, \frac{\sigma \bar{S}_{n-1}\sqrt{\Delta t}}{1 + r\Delta t}\right) \\ A &= (1 + r\Delta t)^{-n}K - \bar{S}_{n-1} \\ D &= \max_{l \leq n-1}(Z_l - M_l) \end{aligned}$$

時点 $n-1$ の情報を持った上で最適な θ_n を考えているので、ここでの確率変数は X_n のみである。そこで、$g(X_n) = (A - X_n)^+ - \theta_n X_n - M_{n-1}$ を X_n の関数とみなすと、図 2 のようになる。この g と定数 D の max を取った関数の期待値を最小にする θ_n が求めたい θ_n になる。関数 g と直線 D が交わる 2 点の x 座標を $\alpha, \beta \quad (\alpha < \beta)$ とおくと、$\alpha = (A - M_{n-1} - D)/(1 + \theta_n), \beta = -(M_{n-1} + D)/\theta_n$ となる。よって、期待値 $W \stackrel{\mathrm{def}}{=} E[\max\{g(X), D\}|\mathcal{G}_{n-1}]$ は次のように計算できる。ただし、$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}}e^{-\frac{x^2}{2\bar{\sigma}^2}}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma \bar{S}_{n-1}\sqrt{\Delta t}}{1+r\Delta t}$ である。

$$\begin{aligned} W &= E[\max\{g(X), D\}|\mathcal{G}_{n-1}] \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha}(A - (1 + \theta_n)x - M_{n-1})f(x)dx \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta} Df(x)dx - \int_{\beta}^{\infty}(\theta_n x + M_{n-1})f(x)dx \end{aligned} \tag{10}$$

α, β が θ_n の関数であることに注意して W を θ_n で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\theta_n} &= -\int_{-\infty}^{\alpha} xf(x)dx - \int_{\beta}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{2\pi}}(\exp\{-\frac{\alpha^2}{2\bar{\sigma}^2}\} - \exp\{-\frac{\beta^2}{2\bar{\sigma}^2}\}) \end{aligned}$$

よって $\alpha = -\beta$ のときに次のような θ_n^* が得られる。

$$\theta_n^* = -\frac{M_{n-1} + D}{(M_{n-1} + D) + (M_{n-1} + D - A)} \tag{11}$$

この θ^* でマルチンゲールを生成し上限評価をする。

さらに 1 時点先の時間幅を大きく取る、また 2 時点先まで考慮するなどの改良も有効である。

5 実験結果

$S_0 = 100, K = 100, r = 0.06, \sigma = 0.4, T = 0.5, N = 40$ の場合において、1 時点先を考慮する場合 (a)、1 時点先の時間幅を大きく取る場合 (b)、2 時点先まで考慮する場合 (c)、での価格の上限の期待値、標準偏差、MAD 値を表 1 に示す。上限に関しては (b) が良いが、マルチンゲールの指標となる MAD 値は 2 時点先まで考慮した場合の方が良いことがわかる。また、θ_n^* を $\bar{S}_{n-1}$ の関数として見るとその形と MAD 値に関係があり、株価の変動に過敏すぎるヘッジ戦略は良い MAD 値を示さないことがわかる。

上限評価については、2 時点先に関しても時間幅を大きく取るなどの改良の余地があるが、数値計算で最適化を行なうため計算時間が他の 2 つに比べ大幅にかかる課題も残っている。

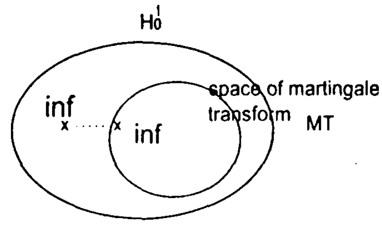

図 1: H_0^1 と MT の関係と、それぞれの inf の関係

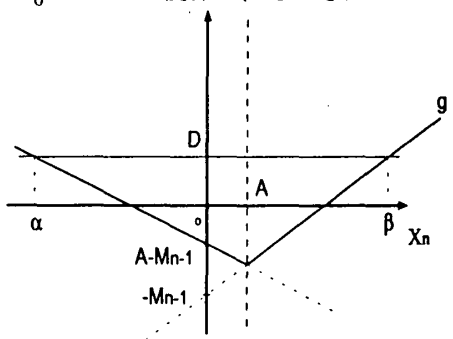

図 2: 関数 g と値 D の関係

表 1: 各上限計算方法における期待値、標準偏差、MAD 値

	期待値	標準偏差	MAD 値
(a)	10.138367	0.030617	6.117698
(b)	10.057387	0.020503	4.497829
(c)	10.102521	0.028139	4.337099

参考文献

[1] L. C. G. Rogers, *Monte Carlo Valuation of American Options*, Mathematical Finance **12** (2002), 271-286.