AHPにおけるグループ（集団）評価について

01001600 成蹊大学　*上田　徹　UEDA Tohru

1．まえがき

中心極限定理によれば、母平均μ、母分散σ^2の母集団から取られた大きさnの無作為標本での標本平均は平均μ、分散σ^2/nの正規分布に収束する。この正規分布の性質はここでは注目しないが、「標本平均の分散が母分散の$1/n$になる、すなわち母分散よりも小さくなる」という効果がAHPにおけるグループ（集団）の評価に用いる幾何平均に見出せることをここでは示す。

2．AHPにおける団体としての評価

人$h(=1,2,\ldots,n)$の項目iとjの間の重要度評価値を$a_{ij}^{(h)}$とすると、n人全体での評価値は項目iとjの間の重要度評価値として幾何平均値$b_{ij}=\sqrt[n]{\prod_{h=1}^{n}a_{ij}^{(h)}}$を用いることにより得られる。また、基準化する前の人hの項目iの重要度$w_i^{(h)}$は幾何平均$\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{(h)}}$を固有ベクトル法の代わりに使うことができるが、これは対数最小自乗誤差和最小化の立場から是認される。すなわち、対数最小自乗法では、誤差$e_{ij}^{(h)}$を考慮して$a_{ij}^{(h)}=e_{ij}^{(h)}w_i^{(h)}/w_j^{(h)}$と表現し、

$$S^{(h)}=\sum_{i<j}(\log e_{ij}^{(h)})^2$$

を最小にする$w_i^{(h)}$を$\sum_i \log w_i^{(h)}=0$の制約の下で求めると$w_i^{(h)}=\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m}a_{ij}^{(h)}}$となるわけである。

ここで、

$$\log e_{ij}^{(h)}=\log a_{ij}^{(h)}-(\log w_i^{(h)}-\log w_j^{(h)})$$

であり、

$$\varepsilon_{ij}^{(h)}=\log e_{ij}^{(h)},\ \alpha_{ij}^{(h)}=\log a_{ij}^{(h)},$$

$$\omega_i^{(h)}=\log w_i^{(h)}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}^{(h)}/m$$

と置くと、

$$\varepsilon_{ij}^{(h)}=\alpha_{ij}^{(h)}-(\omega_i^{(h)}-\omega_j^{(h)})$$

$$=\alpha_{ij}^{(h)}-\{\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}^{(h)}+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ki}^{(h)}\}/m$$

である。このとき、$S^{(h)}$の単純平均は

$$M=\sum_{h=1}^{n}S^{(h)}/n=\sum_{i<j}[\sum_{h=1}^{n}(\varepsilon_{ij}^{(h)})^2/n] \quad (1)$$

となる。

これに対してn人全体の幾何平均値b_{ij}を一対比較行列の要素と考えた場合の対数最小自乗誤差和は、$b_{ij}=f_{ij}u_i/u_h$（f_{ij}：誤差、u_i：項目iの重要度）の対数$\beta_{ij}=\log b_{ij}=\sum_{h=1}^{n}\alpha_{ij}^{(h)}/n$を用いて

$$S_\beta=\sum_{i<j}\{\beta_{ij}-(\sum_{k=1}^{m}\beta_{ik}+\sum_{k=1}^{m}\beta_{kj})/m\}^2$$

$$=\sum_{i<j}\{\sum_{h=1}^{n}\alpha_{ij}^{(h)}/n-\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{n}(\alpha_{ik}^{(h)}+\alpha_{kj}^{(h)})/(mn)\}^2$$

$$=\sum_{i<j}[\sum_{h=1}^{n}\{\alpha_{ij}^{(h)}-\sum_{k=1}^{m}(\alpha_{ik}^{(h)}+\alpha_{kj}^{(h)})/m\}/n]^2$$

$$= \sum_{i<j} [(\sum_{h=1}^{n} \varepsilon_{ij}^{(h)} / n)^2] \qquad (2)$$

となる。従って、

$$M - S_\beta = \sum_{i<j} [\sum_{h=1}^{n} (\varepsilon_{ij}^{(h)})^2 / n - (\sum_{h=1}^{n} \varepsilon_{ij}^{(h)} / n)^2]$$

の[ ]内は$\varepsilon_{ij}^{(h)}$の標本分散になっており、非負である。つまり、S_βを用いることによって相当、対数自乗誤差和が改善されることが期待できる。

3．評価例

朝日、毎日、読売、日経新聞を「政治欄」、「経済欄」、「文化欄」、「スポーツ・芸能欄」の４評価基準を使って１９人の学生に評価してもらった。その結果、評価基準の一対比較行列も含めて１９×５＝９５の一対比較行列が得られた。それらから整合度

$$C.I. = (\lambda_{\max} - m)/(m-1)$$

$\lambda_{\max}$ ：最大固有値

を求め、その１９人での平均値を $C.I.$(mean)とし、幾何平均値b_{ij}を一対比較行列の要素と考えた場合の整合度を $C.I.(b_{ij})$とする。結果を表１に示す。これから、個々の整合度には問題のあった文化欄についても集団としての整合度は問題ないことが分かる。

表１．整合度の比較

	$C.I.$(mean)	$C.I.(b_{ij})$
評価尺度	0.044	0.005
政治欄	0.060	0.004
文化欄	0.183	0.031
経済欄	0.047	0.002
文化・スポーツ	0.101	0.009

表２　MとS_β

	M	S_β
評価尺度	0.512	0.065
政治欄	0.682	0.047
文化欄	1.780	0.368
経済欄	0.532	0.019
文化・スポーツ	1.122	0.106

MとS_βについては表２、図１に示すように、勿論、S_βの方が相当小さくなっている。

4．まとめ

n 人全体での評価値として、項目 i と j の間の重要度評価値の幾何平均値b_{ij}をもちいることにより、対数自乗誤差和は著しく改善されることを理論的、および実例により示した。$C.I.$も改善されるはずだが、実例で示したのみで、理論的にはまだ示せていない。

参考文献

高橋磐郎：「AHP から ANP への諸問題 II」、オペレーションズ・リサーチ、1998 年２月号

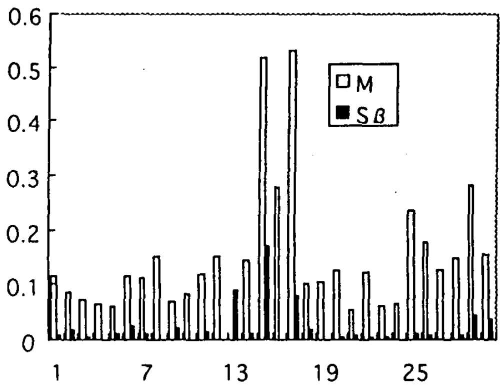

図１　式(1),(2)の[ ]内の値

（６対ごとに１一対比較行列に対応）