2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

評価値一斉法

申請中　名城大学都市情報学部　※杉浦伸　SUGIURA　Shin
01104744　名城大学都市情報学部　木下栄蔵　KINOSHITA　Eizo

1　重み一斉法と評価値一斉法

すでに木下・中西により一斉法が考察され、その収束についても証明がなされている。代替案X,Y,Z について評価マトリックスのベンチマークを変えることや何らかの追加情報が選択者に影響を与えそのウェイトが異なる場合にウェイトを収束させるものである。この場合は、評価マトリックスは一種のみであり、ずれが生じているのはベンチマークごとの評価基準のウェイトだけあるので、この従来の一斉法は「重み一斉法」と言うことが出来る。

一対比較や個々の大小関係によって得られた評価マトリックスが一種類の時はこの重み一斉法で良いが、複数の選択者やあいまいさなどの要因によって評価マトリックスにずれが生じ評価マトリックスが複数出現した場合、重み一斉法が適用できないので複数の評価マトリックスを一つに統一する必要がある。重み一斉法とは別に、ずれによって出現した複数の評価マトリックスを補正し一つに収束させる一斉法を「評価値一斉法」として提案したい。評価値一斉法の方略は下に示すとおりであるが、重み一斉法と同様に評価単価比一定の法則にしたがっているのが最大の特徴である。

2　評価値一斉法の方略

三人の選定者やあるいは一人の選定者のあいまいさなどによって評価マトリックスが三種類出現した場合（評価基準２つ、代替案３つ）についての一般式を記述する。異なる三種類の評価値を

$$U(i)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ U_{21}(i) & U_{22}(i)\\ U_{31}(i) & U_{32}(i)\end{bmatrix} U(j)=\begin{bmatrix}U_{11}(j) & U_{12}(j)\\ 1 & 1\\ U_{31}(j) & U_{32}(j)\end{bmatrix} U(k)=\begin{bmatrix}U_{11}(k) & U_{12}(k)\\ U_{21}(k) & U_{22}(k)\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

とする。

次にベンチマークにしたい行の値の逆数を対角要素とし、逆対角要素を０にした行列をかける事によって評価マトリックスのベンチマークの変更をする演算することが出来る。

$$U(i)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{21}(i) & 0\\ 0 & 1/U_{22}(i)\end{bmatrix}=U'(i)\ U(i)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{31}(i) & 0\\ 0 & 1/U_{32}(i)\end{bmatrix}=U''(i)$$

$$U(j)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{11}(j) & 0\\ 0 & 1/U_{12}(j)\end{bmatrix}=U'(j)\ U(j)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{31}(j) & 0\\ 0 & 1/U_{32}(j)\end{bmatrix}=U''(j)$$

$$U(k)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{11}(k) & 0\\ 0 & 1/U_{12}(k)\end{bmatrix}=U'(k)\ U(k)\cdot\begin{bmatrix}1/U_{12}(k) & 0\\ 0 & 1/U_{22}(k)\end{bmatrix}=U''(k)$$

こうして従来の一斉法と同様の導出を行う、

$U(i)$	$U(j)$	$U(k)$
	$U'(i)$	$U''(i)$
$U'(j)$		$U''(j)$
$U'(k)$	$U''(k)$	

$$\frac{U(i)+U'(j)+U'(k)}{3}=U(i+1)$$

$$\frac{U(j)+U'(i)+U''(k)}{3}=U(j+1)$$

$$\frac{U(k)+U''(i)+U''(j)}{3}=U(k+1)$$

このステップを数回繰り返し、評価マトリックスが収束すると、

$$U(i)=U(i+1),U(j)=U(j+1),U(k)=U(k+1)$$

となり、これら$U(i+1),U(j+1),U(k+1)$はすべて

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \frac{1}{1+U_{22}(i+1)+U_{32}(i+1)}\\ \frac{U_{21}(i+1)}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \frac{U_{22}(i+1)}{1+U_{22}(i+1)+U_{32}(i+1)}\\ \frac{U_{31}(i+1)}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \frac{U_{32}(i+1)}{1+U_{32}(i+1)+U_{32}(i+1)}\end{bmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix}\frac{U_{11}(j+1)}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \frac{U_{12}(j+1)}{U_{12}(j+1)1+U_{32}(j+1)}\\ \frac{1}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \frac{1}{U_{12}(j+1)+1+U_{32}(j+1)}\\ \frac{U_{31}(j+1)}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \frac{U_{32}(j+1)}{U_{12}(j+1)+1+U_{32}(j+1)}\end{bmatrix}$$

$=$

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{U_{11}(k+1)}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \dfrac{U_{12}(k+1)}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1} \\
\dfrac{U_{21}(k+1)}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \dfrac{U_{22}(k+1)}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1} \\
\dfrac{1}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \dfrac{1}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1}
\end{bmatrix}
$$

となり、評価単価比一定を満たし正規化すると同一の値となる。これが評価値一斉法の方略である。

3 計算例

ステップ①

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & 0.17 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.3 & 1.5 \\ 1 & 1 \\ 1.8 & 0.6 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.1 & 4 \\ 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1.5 & 0.34 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.333 & 5.88 \\ 0.667 & 2.94 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.333 & 0.667 \\ 6 & 0.4 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 0.167 & 2.5 \\ 0.556 & 1.667 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0.5 \\ 10 & 0.25 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}
$$

ステップ②

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.443 & 0.556 \\ 6.333 & 0.273 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.333 & 1.833 \\ 1 & 1 \\ 1.767 & 0.48 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.2 & 4.127 \\ 0.574 & 2.202 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.29 & 1.799 \\ 1 & 1 \\ 1.839 & 0.491 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.158 & 3.663 \\ 0.544 & 2.037 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0.546 \\ 5.3 & 0.262 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 0.188 & 3.819 \\ 0.566 & 2.083 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.87 & 0.534 \\ 5 & 0.242 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.348 & 1.874 \\ 1 & 1 \\ 1.742 & 1.454 \end{bmatrix}
$$

ステップ③

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.1 & 0.545 \\ 5.544 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.783 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.182 & 3.87 \\ 0.561 & 2.107 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.323 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.788 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.180 & 3.861 \\ 0.559 & 2.104 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.086 & 0.545 \\ 5.503 & 0.259 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 0.182 & 3.861 \\ 0.559 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.082 & 0.544 \\ 5.495 & 0.258 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.837 \\ 1 & 1 \\ 1.782 & 0.475 \end{bmatrix}
$$

ステップ④

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.089 & 0.545 \\ 5.514 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.836 \\ 1 & 1 \\ 1.784 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.181 & 3.865 \\ 0.560 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.785 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.181 & 3.861 \\ 0.560 & 2.104 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.086 & 0.545 \\ 5.506 & 0.259 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 0.182 & 3.865 \\ 0.561 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.094 & 0.545 \\ 5.525 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.323 & 1.836 \\ 1 & 1 \\ 1.786 & 0.475 \end{bmatrix}
$$

ステップ⑤

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.090 & 0.545 \\ 5.515 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.836 \\ 1 & 1 \\ 1.785 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.181 & 3.865 \\ 0.560 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

4 重み一斉法と評価値一斉法の合成

このように一斉法は、評価マトリックスにずれがある場合、まず評価値一斉法を用い評価値を一つに収束させ、その後重み一斉法を用いることで完全な体系となる。重み一斉法にも評価値一斉法にも、評価単価比一定の法則が用いられていると言うことは一斉法において、この法則が必要条件であると言える。

また評価単価比という概念は従来の saaty 型 AHP や ANP には見られないものであり、それらとは別の体系として一斉法が精緻に構築されている最大の特徴であると言える。

参考文献

[1] 木下栄蔵、「AHP の理論と実際」、日科技連

[2] 木下栄蔵、「孫子の兵法の数学モデル」、講談社

[3] 高橋磐郎、「Saaty 型 Supermatrix と木下・中西型一斉法の比較」