AHP,ANPの固有ベクトル法における感度分析

01206313　静岡大学　関谷和之　Sekitani Kazuyuki

1. 序論

AHPは1970年代Saaty[1]に提唱されて以来，現在までに数多くの意思決定問題において活用されている．また，大学のＯＲ関係，経営科学関係の多くの講義でもAHPが紹介されている．

AHPは，評価目的，評価項目，代替案間の評価関係全体を階層構造で構造化し，各評価関係に基づき評価項目や代替案を一対比較を行なうことで得られる一対比較行列群を作成し，階層構造に則してそれぞれの一対比較行列の解析結果から総合評価するという３段階からなる．AHPの解析での特徴は，一対比較行列の主固有ベクトルを対象の重要度として与えることである．この解析法は固有ベクトル法と呼ばれる．

さらに，SaatyはAHPでの階層構造をネットワーク構造に拡張することを試み，これをANPと名付けた．つまり，ANPは評価目的，評価項目，代替案間の評価関係全体をネットワーク構造として構造化し，各評価関係に基づき評価対象(評価項目，代替案)をAHP等で評価し，それらの評価による数値結果をまとめた超行列を解析することで各評価対象を総合評価するという３段階からなる．Saatyは超行列をべき乗することで，評価対象の総合評価値を決定する解析手法を提案した．しかし，この解析方法では十分に解析できない評価構造もあり，解析可能な評価構造の場合でも，冗長な解析手順を含む．一方，Sekitani and Takahashi[2]では，ある評価構造におけるANPでのSaatyによる解析手法の結果は固有ベクトル法のそれに一致することが報告され，さらに階層構造も含む全ての評価構造に対して適用可能な超行列の解析手法を固有ベクトル法の原理に基づき提案されている．

AHP,ANPを実際に適用する場合には単に３段階を一巡行なって終わりにするのではなく，得られた総合評価値さらに超行列，評価構造を再検討し，意思決定者が納得するまでモデルを作り替えることが大切である．その際に，評価行列の数値の変化が総合評価値にどんな影響を与えるかを簡単に感度分析できれば，意思決定者には検討する上で有用な情報を与える．そこで，本研究では，AHPでの階層構造を含むネットワーク構造の下での評価結果を超行列として扱い，[2]の固有ベクトル法に基づき超行列での数値の摂動による感度分析を考察する．

2. 階層構造における感度分析

AHPでの評価構造は階層構造である．そこで，図１のAHPの例を考えよう．評価目的Gの下で２つの評価項目C_1, C_2から３つ代替案A_1, A_2, A_3を評価する．この時，Gから見た

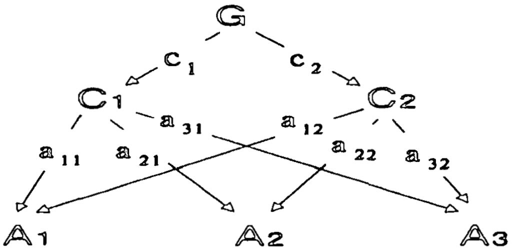

図 1: AHP全体の評価構造

C_1, C_2の重要度それぞれをc_1, c_2とし，$c = [c_1, c_2]^\top$を評価ウエイトベクトルと呼ぶ．さらに，$C_j (j = 1, 2)$から見た代替案$A_i (i = 1, 2, 3)$の重要度をa_{ij}とし，$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$を評価行列と呼ぶ．さて，AHPの第３段階目では，

$$Ac = p \tag{2.1}$$

により，各代替案A_jの総合評価値p_jを与える．一方，この階層構造に対する超行列は(2.2)の行列として与えられる．すなわち，Gから見たC_iへの評価結果は超行列の$(1, 1+i)$成分に，C_jから見たA_iへの評価結果は$(2+i, 1+j)$成分に与える．なお，$(1, 1)$成分には１を与える．

$$\begin{array}{c} \\ G \\ C_1 \\ C_2 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} G & C_1 & C_2 & A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ q_1 \\ q_2 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ = \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ q_1 \\ q_2 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.2}$$

(2.2)の超行列は主固有値が１なので，(2.2)は超行列の固有方程式であり，$[1, q_1, q_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3]^\top$は主固有ベクトルである．また，

$$[q_1, q_2]^\top = [c_1, c_2]^\top = c, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3]^\top = Ac = p \tag{2.3}$$

である．したがって，各代替案の総合評価値pは超行列の固有方程式(2.2)から主固有ベクトルを求めることでも得られる．さらに，(2.2),(2.3)から超行列に解析による各評価項目の総合評価値$[q_1, q_2]^\top$は評価ウエイトベクトルcに一致することもわかる．

一般に，階層構造を持つ評価の超行列は下三角行列であり，階層構造での上位階層レベル(例えば，評価項目の階層は代替案の階層の上位レベル)の総合評価値の変化もしくは下位階層レベルへの評価結果の変化は下位階層レベルの総合評価値に影響を与え，その逆は成立しない．そこで階層構造における感度分析では，当該階層レベルとその直接上位にある階層レベルの２階層にだけに注目し，上位階層レベルに含まれる評価対象の総合評価値の変化と上位レベルに含まれる評価対象からの当該階層レベルに含まれる評価対象への評価結果の変化が当該階層レベルに含まれる評価対象の総合評価値にどのような影響を与えるかを調べることにする．

そこで，先で述べた例で階層構造での感度分析を議論する．つまり，当該階層レベルは代替案$A_i (i = 1, 2, 3)$，上位階層レベルは評価項目$C_j (j = 1, 2)$である．そして，この感度分析での変動要因を以下の２種類とする．

1. 評価ウエイトベクトルcが領域Ωを変動する．
2. 評価項目C_jによる代替案への評価結果$[a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}]^\top$は領域$\Delta_j$を変動する

この変動要因による代替案の総合評価値への影響は，

- 各代替案の総合評価値の変動幅
- 代替案の総合評価値の順位不変性

の２点で調べることにする．

変動要因１での代替案 A_i の総合評価値の変動幅を求めるには，

$$\begin{array}{lll} \max. & \bar{p}_i - \underline{p}_i & \\ s.t. & A\boldsymbol{c}_1 = \bar{\boldsymbol{p}}, & A\boldsymbol{c}_2 = \underline{\boldsymbol{p}} \\ & \boldsymbol{c}_1 \in \Omega, & \boldsymbol{c}_2 \in \Omega \end{array} \tag{2.4}$$

を解き，その最適解を $(^*)$ を付して記せば，$\bar{p}_i^*, \underline{p}_i^*$ が変動幅の最大値，最小値になる．次に，変動要因１で代替案の総合評価値の順位不変性を検討しよう．(2.1) での代替案の総合評価値は $p_1 > p_2 > p_3$ とする．つまり代替案 A_1，A_2,A_3 がそれぞれ第１位，第２位，第３位である．この順位関係を壊す条件は $p_1 \le p_2$ または $p_2 \le p_3$ である．したがって，

$$\begin{array}{ll} \max. & p_2 - p_1 \\ s.t. & A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \in \Omega \end{array}, \quad \begin{array}{ll} \max. & p_3 - p_2 \\ s.t. & A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} \in \Omega \end{array} \tag{2.5}$$

をそれぞれ解き，いずれかの最適値が０以上であれば，ある $\boldsymbol{c} \in \Omega$ で順位関係「代替案 A_1，A_2,A_3 がそれぞれ第１位，第２位，第３位」を壊し，いずれの最適値も０未満であれば，その順位関係はどの $\boldsymbol{c} \in \Omega$ でも不変である．

変動要因２では評価行列の各列が変動し，このとき評価行列全体が取り得る領域は

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} [a_{11}, a_{21}, a_{31}]^\top \in \Delta_1 \\ [a_{12}, a_{22}, a_{32}]^\top \in \Delta_2 \end{array} \right\}$$

であり，これを $\Delta_1 \times \Delta_2$ と記す．代替案 A_i の総合評価値の変動幅を求めるには，最適化問題 (2.4) の制約条件を $\bar{A}\boldsymbol{c} = \bar{\boldsymbol{p}}$, $\underline{A}\boldsymbol{c} = \underline{\boldsymbol{p}}$, $\bar{A} \in \Delta_1 \times \Delta_2$, $\underline{A} \in \Delta_1 \times \Delta_2$ に変更すれば良い．同様に，変動要因２の下で代替案の総合評価値の順位不変性を検討するには２つの最適化問題 (2.5) のそれぞれの制約条件を $A\boldsymbol{c} = \bar{\boldsymbol{p}}, A \in \Delta_1 \times \Delta_2$, に置き換えれば良い．

3. ネットワーク構造における感度分析

ネットワーク構造では評価対象間で双方向の評価関係を認める点が階層構造と異なる．したがって，ネットワーク構造の評価関係では，評価項目群に対して代替案群が下位階層レベルであるとは限らない．図２で示そう．２つの評価項目 C_1, C_2 と３つの代替案 A_1, A_2, A_3 との間で，各評価項目 $C_i(i = 1,2)$ の観点から全ての代替案 $A_j(j = 1,2,3)$ を評価し，一方，各代替案 $A_j(j = 1,2,3)$ の観点から全ての各評価項目 $C_i(i = 1,2)$ を評価する相互評価関係では，上下関係はない．ここで，評価項目 C_j からの代替案 A_i への評価結果

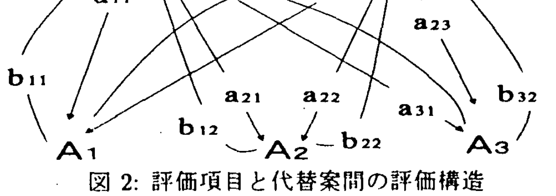

図 2: 評価項目と代替案間の評価構造

を a_{ij}, 代替案 A_i から評価項目 C_j への評価結果を b_{ji} とする．なお，$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1 (j = 1,2)$,$\sum_{j=1}^{2} b_{ji} = 1 (i = 1,2,3)$ である．したがって，図３に対応する超行列の主固有値は１なので，以下の固有方程式から各評価対象の総合評価値が得られる．

$$\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

階層構造の場合 (2.3) と異なり，超行列が下三角行列でないので (3.1) の主固有ベクトルは陽に表現できない．

この評価構造での変動要因として，代替案 A_1 から全評価項目 $C_i(i = 1,2)$ への評価結果 $[b_{11}, b_{21}]^\top$ が領域 $\Psi \subseteq \left\{ [x_1, x_2]^\top \middle| x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \ge 0 \right\}$ で変動するとしよう．この変動要因による各評価対象に総合評価値の影響を以下の定理で述べる．

定理 1 $\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ とする．I を単位行列,$\boldsymbol{b} = [b_{11}, b_{12}]^\top$ とすると，

$$\begin{bmatrix} \left(I + \bar{B}\left(I - \bar{A}\bar{B}\right)^{-1} \bar{A}\right) \boldsymbol{b} \\ 1 \\ \left(I - \bar{A}\bar{B}\right)^{-1} \bar{A}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

は $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{b}\bar{B} \\ \boldsymbol{a} \\ \bar{A} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ の正の主固有ベクトルである．ここで，$\boldsymbol{a} = [a_{11}, a_{12}]$ である．

定理１から，各評価項目の総合評価値 $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2]^\top$ と各代替案の総合評価値 $\boldsymbol{p} = [p_1, p_2, p_3]^\top$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{q} = \frac{\left(I + \bar{B}\left(I - \bar{A}\bar{B}\right)^{-1} \bar{A}\right) \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}^\top \left(I + \bar{B}\left(I - \bar{A}\bar{B}\right)^{-1} \bar{A}\right) \boldsymbol{b}}, \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{1 + \boldsymbol{e}^\top \left(I - \bar{A}\bar{B}\right)^{-1} \bar{A}\boldsymbol{b}} \begin{bmatrix} 1 \\ \left(I - \bar{A}\bar{B}\right)^{-1} \bar{A}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

である．

この変動要因での代替案の総合評価値の順位不変性を検討するには２つの最適化問題 (2.5) のそれぞれの制約条件を (3.4) かつ $\boldsymbol{b} \in \Psi$ に置き換えれば良い．また，代替案 A_i の総合評価値の変動幅を求めるには，同様な制約式の置換をすれば良い．

4. 結論

ネットワーク構造を有する評価に対して固有ベクトル法で得られる総合評価値の感度分析を提案した．その感度分析は変動領域が凸多面体であれば，線形計画問題もしくは線形分数計画問題を解くことであり，容易に実現可能である．

References

[1] Saaty T.L.: *The Analytic Network Process* (RWS Publications,Pittsburgh,1996).

[2] Sekitani K. and Takahashi I.: "A unified model and analysis for AHP and ANP", Journal of the Operations Research Society of Japan 44 (2001) 67-89.