2－E－9

2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

有限n人非協力ゲームの パレート最適な相関均衡の存在判定について

02004620 慶應義塾大学 *梅澤 正史 UMEZAWA Masashi
慶應義塾大学 岡田 真弥 OKADA Masaya
01400760 慶應義塾大学 西野 寿一 NISHINO Hisakazu

1 はじめに

本研究では、有限n人非協力ゲームにおけるパレート最適な相関均衡の存在について考える。相関均衡は、Aumann [1], [2] によって提案された均衡概念の一つであり、その均衡点の集合はナッシュ均衡点の集合を含むものとして知られている。ゲームGが与えられた時、ある条件（数rが与えられた時、全てのプレーヤーが少なくともrの期待利得を得る。又は、一意な均衡である。）を満たすようなナッシュ均衡が存在するのか否かを問う問題の多くはNP-hardであるのに対して、相関均衡の存在に関しては多項式時間で可能であるという結果が得られている (Gilboa and Zemel [3])。本研究では、2人ゲームにおいては、線形計画問題を利用することによって、パレート最適な相関均衡の存在を判定することが多項式時間で可能であることを示す。n人のケースについては、その判定問題を示す。

2 有限n人非協力ゲーム

$N=\{1,...,n\}$を非空なプレーヤーの集合とし、各プレーヤー$i\in N$に対してS^iをプレーヤーiの純粋戦略の非空な集合とする。さらに、$S\equiv\prod_{i\in N}S^i$とし、各プレーヤー$i\in N$に対して$h^i:S\to\mathbb{R}$をプレーヤーiの利得関数とする。この時、$(N,(S^i)_{i\in N},(h^i)_{i\in N})$をゲーム$G$とする（より正確には、戦略形の非協力ゲーム）。もし、集合Nと$(S^i)_{i\in N}$が有限であるならば、そのゲーム$G=(N,(S^i)_{i\in N},(h^i)_{i\in N})$は有限であると呼ぶ。本稿では、有限ゲームを扱う。さらに、Σ^iをS^i上の全ての確率ベクトルの集合とし、プレーヤーiの混合戦略の集合と呼ぶ。$\Sigma\equiv\prod_{i\in N}\Sigma^i$とする。任意の混合戦略の組$\sigma=(\sigma^1,...,\sigma^n)\in\Sigma$に対して、プレーヤー$i$の期待利得$\pi^i(\sigma)$は以下のように表される。

$$\pi^i(\sigma)=\sum_{s\in S}\left(\prod_{i\in N}\sigma^i(s_i)\right)h^i(s)$$

ここで、$s\equiv(s_1,...,s_n)\in S$である。
この時、ナッシュ均衡点は以下のように定義される。

定義 1 戦略形ゲーム$G=(N,(S^i)_{i\in N},(h^i)_{i\in N})$において、以下の不等式が成り立つ時、混合戦略の組$\bar{\sigma}=(\bar{\sigma}^1,...,\bar{\sigma}^n)\in\Sigma$をナッシュ均衡点（*Nash equilibrium point*）と呼ぶ。

$$\pi^i(\bar{\sigma})\geq\pi^i(\bar{\sigma}^{-i},\sigma^i)\ for\ \forall i\in N,\ \forall\sigma^i\in\Sigma^i.$$

一方、プレイヤーの行動を相関させる戦略に基づく均衡概念として、以下の相関均衡点が定義される。

定義 2 戦略形ゲーム$G=(N,(S^i)_{i\in N},(h^i)_{i\in N})$において、$p(s)>0$となるような任意の$s=(s_1,...,s_n)=(s^1_{j_1},...,s^n_{j_n})\in S$、任意のプレーヤー$i\in N$、及び任意の戦略$\bar{s}^i\in S^i$に対して、

$$\sum_{\{s\in S|s_i=s^i_{j_i}\}}p(s)h^i(s)\geq \sum_{\{s\in S|s_i=s^i_{j_i}\}}p(s)h^i(s^1_j,...,\bar{s}^i,...,s^n_{j_n})\quad(1)$$

が成り立つ時、S上の確率分布pを相関均衡点（*correlated equilibrium point*）と呼ぶ。

ここで、相関均衡点の集合を

$$P\equiv\{p\in\mathbb{R}^d\mid p\text{ satisfies (1), }e^tp=1,\text{ and }p\geq0.\}$$

where $p^t\equiv(p(s_1),...,p(s_d))$ and $d\equiv|S|$とする。さらに、$H\equiv(h(s_1),...,h(s_d))$, where $h(s_j)^t=(h^1(s_j),...,h^n(s_j))$とすると、相関戦略$p$における期待利得ベクトルは、$Hp$と表される。

定義 3 戦略形ゲーム $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (h^i)_{i \in N})$ において、$U = \{Hp \in R^n \mid e^t p = 1, p \geq 0\}$ を相関均衡戦略における実現可能集合 (*feasible set*) と呼ぶ。

定義 4 戦略形ゲーム $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (h^i)_{i \in N})$ において、$v_i \geq u_i$ *for* $\forall i \in N$, *and* $v_i > u_i$ *for some* $i \in N$ となるような期待利得ベクトル $v = (v_1, ..., v_n) \in U$ が存在しない時、期待利得ベクトル $u = (u_1, ..., u_n) \in U$ を（強）パレート最適 (*strict Pareto optimal*) であるという。

3 パレート最適な相関均衡の存在

3.1 例

囚人のジレンマ・ゲームは、パレート最適な相関均衡を持たないが、男女のジレンマ・ゲームはそのような均衡点を持つ。

	自白	黙秘
自白	5 年, 5 年	1 年, 8 年
黙秘	8 年, 1 年	2 年, 2 年

表 1: 囚人のジレンマ・ゲームの利得行列

	サッカー	映画
サッカー	2, 1	-1, -1
映画	-1, -1	1, 2

表 2: 男女のジレンマ・ゲームの利得行列

3.2 判定法

以下の手順を考えることによって、ゲーム $G = (N, (S^i)_{i \in N}, (h^i)_{i \in N})$ が与えられた時、$n = 2$ の時には、パレート最適な相関均衡が存在するかどうかを多項式時間で判定可能であることがわかる。

任意の純粋戦略の組 $s_j \in S$ に対して、線形計画問題

$$(LP1_j) \left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & \alpha^t h(s_j) \\ \text{subject to} & \alpha^t H \leq e^t \\ & \alpha \geq 0 \end{array} \right.$$

の最適解を α_j とし、$S^w \equiv \{s_j \in S \mid \alpha_j^t h(s_j) = 1\}$ とすると、S^w は、弱い意味のパレート最適性を持つ $h(s)$ の純粋戦略組 s の集合になっている。ここから（強）パレート最適な純粋戦略組の集合 S^p を求める（方法略）。

さらに、任意の $s_j^p \in S^p$ に対して、以下の線形計画問題

$$(LP2_j) \left| \begin{array}{ll} \text{maximize} & p(s_j^p) \\ \text{subject to} & p \in P \end{array} \right.$$

の解を $p_j^* = (p_j^*(s))_{s \in S}$ とする。$p_j^*(s_j^p) = 1$ となるような s_j^p が 1 つでも存在すれば、そのゲームにおいてパレート最適な相関均衡は存在する。さもなければ、そのような相関均衡は存在しない。上記の判定方法は、パレート最適なナッシュ均衡の存在判定法にもなっていることに注意する。

命題 1 有限 2 人非協力ゲームに対して、パレート最適な相関均衡及びパレート最適なナッシュ均衡が存在するか否かの判定は多項式時間で可能である。

n 人のケースについては、存在の判定問題を示す。以下の問題

$$(P) \left| \begin{array}{ll} \max_p \min_q & \sum_{j=1}^d q_j \\ \text{subject to} & Hq \geq Hp, q \geq 0, p \in P \end{array} \right.$$

の解を (p^*, q^*) とすると、$\sum_{j=1}^d q_j^* = 1$ ならば、パレート最適な相関均衡が存在し、さもなければ存在しない、と判定できる。

4 まとめ

有限 n 人非協力ゲームにおけるパレート最適な相関均衡の存在を判定する方法について考察した。

参考文献

[1] R. Aumann, "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies", *Journal of Mathematical Economics*, **1** (1974) 67-95.

[2] R. Aumann, "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality", *Econometrica*, **55** (1987) 1-18.

[3] I. Gilboa and E. Zemel, "Nash and Correlated Equilibria: Some Complexity Considerations", *Games and Economic Behavior*, **1** (1989) 80-93.