ゲームオプションの評価とその数値計算について

02202983　南山大学　＊瀬古 進　SEKO Susumu
01202653　南山大学　澤木 勝茂　SAWAKI Katsushige

1　はじめに

オプションには，アメリカ型およびヨーロッパ型のオプションのように権利行使の自由度によって分類されたり，アジア型およびロシア型などのように権利行使時の利得関数に応じて分類されるなど様々なものがある．いずれのオプションにおいても権利の行使は，オプションの保有者（買手）に付与されていて，オプションの発行人である売手には買手の権利行使に応じて支払いの義務が発生する．本論文では，売手にもすでに発行したオプションをキャンセルすることを権利として認める双方向のオプションを考察する．このようなオプションをKifer[4]はゲームオプションと呼んでいる．ゲームオプションにおいては，買手と売手はそれぞれ行使する権利，キャンセルする権利を有する．任意の時点までに買手が権利行使をしなければ，売手はこのオプションを罰金を支払うことによって買戻す権利を有している．このように買手と売手をゲームにおけるプレーヤーと見立てて，両者の間で締結されたゲーム的条件付請求権の評価をここでは考察する．特に，ゲームプットオプションについては，シミュレーションによる数値実験の結果を紹介する．

2　二項過程の下でのゲームオプション

本論文では，無危険資産と危険資産の2種類の資産から成る完全で効率的な資産市場を想定し，有限な離散期間$\{0,1,\cdots,N\}$において取引されていると仮定する．第n期での無危険資産の収益率をr_nとすれば，その価格B_nは，

$$\begin{aligned} B_n &= B_{n-1}(1+r_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+r_k),\ n=0,1,2,\cdots,N \end{aligned} \tag{1}$$

となる．ただし，$B_0=1$とする．危険資産の価格をS_nとすれば，

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1}(1+\rho_n) \\ &= S_0\prod_{k=1}^{n}(1+\rho_k),\ n=0,1,2,\cdots,N \end{aligned} \tag{2}$$

である．ただし，S_0は所与であり，ρ_kは確率pでbをとり，確率$q=1-p$でaをとる確率変数である．a,bをそれぞれ下降率，上昇率とすれば，無裁定条件より

$$-1<a<r_n<b,\ 0<p<1 \tag{3}$$

が成立しなければならない．リスク中立確率をp°とすれば，

$$p_k^\circ=\frac{r_k-a}{b-a},\ q_k^\circ=1-p_k^\circ=\frac{b-r_k}{b-a}$$

となり，p°に関する期待値をE°で表わす．このとき，明らかに$E^\circ[\rho_k]=r_k$である．任意のn期までに買手が権利行使を行なう前に売手がゲームオプションをキャンセルすれば，売手は買手に

$$X_n=Y_n+\delta_n \tag{4}$$

を支払い，売手がキャンセルする前に買手が権利行使したときには，売手は買手にY_nを支払う．δ_nは売手が支払うキャンセル料である．もし，プットおよびコールを想定するならば，それぞれ

$$Y_n=(K-S_n)^+ \text{または，} Y_n=(S_n-K)^+$$

となる．売手と買手が同時に権利行使したときは，買手の権利行使が優先すると仮定する．σを売手の停止時刻，τを買手の停止時刻とすれば，ゲームオプションの停止時刻は$\min(\sigma,\tau)$となり，この停止時刻での売手が買手に支払う利得を$R(\sigma,\tau)$とすれば

$$R(\sigma,\tau)=X_\sigma 1_{\sigma<\tau}+Y_\tau 1_{\tau\le\sigma} \tag{5}$$

となる．次に，取引戦略$\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_N)$を定義する．各nに対して，$\pi_n=(\alpha_n,\beta_n)$とし，α_nは危険資産の保有量，β_nは無危険資産の保有量である．取引戦略πの下でn期の富をZ_n^πとすれば

$$Z_n^\pi=\alpha_n S_n+\beta_n B_n \tag{6}$$

となる．初期の富$z>0$が所与のとき，$n=1$に対して$z=\alpha_1 S_0+\beta_1 B_0$，$n>1$に対して

$$S_{n-1}(\alpha_n-\alpha_{n-1})=-B_{n-1}(\beta_n-\beta_{n-1}) \tag{7}$$

が成立するとき，取引戦略πは自己充足的と呼ぶ．ゲームオプションに対するヘッジ戦略とは，すべてのnに対して$Z_{\sigma\wedge n}^\pi\ge R(\sigma,n)$となるような停止時刻$\sigma$と自己充足的取引戦略$\pi$の組$(\sigma,\pi)$である．ゲームオプションの価値$V^\circ$は

$$V^\circ=\inf\{V|\text{ヘッジ戦略}(\sigma,\pi)\text{に対して}Z_0^\pi=V\} \tag{8}$$

によって定義する．

補助定理 1　$M_n^\pi\equiv B_n^{-1}Z_n^\pi$とおけば，自己充足的取引戦略$\pi$に対して

$$M_n^\pi=z+\sum_{k=1}^{n}B_k^{-1}\alpha_k S_{k-1}(\rho_k-r_k)$$

となり，E°に関してマルチンゲールである．

定理 2　V°は次の再帰式を満たすV_{0N}°によって与えられる．

$$V_{nN}^\circ=\min\{B_n^{-1}X_n,\max(B_n^{-1}Y_n,E^\circ(V_{n+1\ N}^\circ))\} \tag{9}$$

ただし，$V_{NN}^\circ=B_N^{-1}Y_N$である．

定理 3 各 $n = N, N-1, \cdots, 1, 0$ に対して

$$\begin{aligned} V^*_{nN} &= \min_{\sigma} \max_{\tau} E^*(B^{-1}_{\sigma\wedge\tau} R(\sigma,\tau)) \\ &= \max_{\tau} \min_{\sigma} E^*(B^{-1}_{\sigma\wedge\tau} R(\sigma,\tau)) \end{aligned}$$

が成立し，最適な停止時刻 $(\sigma^*_{nN}, \tau^*_{nN})$ は

$$\begin{aligned} \sigma^*_{nN} &= \min\{k \geq n | B^{-1}_k X_k = V^*_{kN} \text{ or } k = N\} \\ \tau^*_{nN} &= \min\{k \geq n | B^{-1}_k Y_k = V^*_{kN}\} \end{aligned}$$

で与えられる．

系 4 最適な停止時刻 $(\sigma^*_{nN}, \tau^*_{nN})$ に対して

$$E^*(B^{-1}_{\sigma^*_{nN}\wedge\tau} R(\sigma^*_{nN}, \tau)) \leq V^*_{nN} \leq E^*(B^{-1}_{\sigma\wedge\tau^*_{nN}} R(\sigma, \tau^*_{nN}))$$

が成立する．

系 5 $Z_0^{\pi^*} = V^*$ となる戦略 (σ^*_{0N}, π^*) がゲームオプションに対するヘッジ戦略となるような自己充足的取引戦略 π^* が存在し，π^* は時刻 $\sigma^*_{0N} \wedge \tau_{0N}$ までは一意である．

3 数値計算

この節ではモンテカルロ法を用いてゲームプットオプション価格および売手と買手の最適戦略を推定するアルゴリズムについて述べる．このアルゴリズムは，あらかじめ売手と買手の最適戦略を満期時点から後ろ向きに計算し，その情報をもとにオプション価格を推定する方法で，Grant, Vora and Week[2] の方法に基づいている．2 節では危険資産は二項過程を用いて記述したが，この節では連続的な挙動

$$dS_t = S_t(r dt + \kappa d\tilde{z}_t), \ t \in [0, T] \tag{10}$$

を仮定する．ここで κ は危険資産価格のボラティリティ，$\tilde{z}_t$ はリスク中立確率の下での標準ブラウン運動，T は満期である．区間 $[0, T]$ を N 個の等間隔区間に分割し，$\Delta t = T/N$ とする．

$$S_n = S(t_n), \ t_n = n\Delta t, \ n = 0, 1, \cdots, N,$$

とすると，(10) は

$$S_n = S_{n-1}(1 + r\Delta t + \kappa x_n \sqrt{\Delta t}), \ n = 1, \cdots, N, \tag{11}$$

となる [3]．ここで x_n は標準正規分布に従う独立な確率変数列である．

3.1 アルゴリズム

価格算出のアルゴリズムは次の 3 段階からなる．

STEP1: 危険資産価格を有限なグリッドに分割する 時点 0 から満期 T までを t_n, $n = 0, \cdots, N$, $N\Delta t = T$ とし，危険資産価格を有限なグリッド $0 < S_n^1 < \cdots < S_n^g < \cdots < S_n^G < \infty$ に分割する．

STEP2: 売手と買手の最適戦略を推定する 満期時点 N における売手の最適キャンセル境界 (以下，OCB) と買手の最適行使境界 (同様に OEB) はそれぞれ K である．さらに各時点 n，各グリッド g において売手が早期キャンセルしたときと持ち越したときの差を $d^C(S_n^g)$，買手が早期行使したときと持ち越したときの差を $d^E(S_n^g)$ とすると，$d^C(S_n^g)$ と $d^E(S_n^g)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} d^C(S_n^g) &= X_n^g - E_n[H_n | S_n^g], \\ d^E(S_n^g) &= Y_n^g - E_n[H_n | S_n^g] \end{aligned} \tag{12}$$

となる．ただし $Y_n^g = (K - S_n^g)^+$, $X_n^g = Y_n^g + \delta_n$ である．ここで $E_n[H_n | S_n^g]$ は時点 n において危険資産価格が S_n^g であるときの持ち越し価値であり，(11) 式より前向きにパスを発生させて計算する．このとき将来の時点における OCB と OEB の情報を必要とする．ゲームプットオプションは

$$\begin{cases} d^C(S_n) \leq 0 \Rightarrow \text{売手はキャンセル} \\ d^C(S_n) > 0 \Rightarrow \text{売手は持ち越し} \end{cases}, \begin{cases} d^E(S_n) \geq 0 \Rightarrow \text{買手は行使} \\ d^E(S_n) < 0 \Rightarrow \text{買手は持ち越し} \end{cases}$$

となる．各 g について $d^C(S_n^g)$ および $d^E(S_n^g)$ を計算し，その符号の入れ替わるところの値を比例配分で求め，OCB および OEB を求める．このような計算を $n = N-1, \cdots, 0$ まで繰り返し，各時点における OCB および OEB を逐次に求める．

STEP3: ゲームプットオプション価格を計算する 全ての時点における OCE および OEB が既知のため，時点 0 から (11) 式を用いてパスを発生させてオプション価格を求める．

3.2 計算結果

計算結果については発表当日に提示する．

4 まとめ

本研究では，シミュレーションを用いることによりゲームオプション価格を数値的に提示し，売手と買手の戦略についての性質を確認することができた．しかし両者のもつ境界ないし領域についての定性的な性質は判っておらず，これを解析的に論証することは今後の課題である．

参考文献

[1] 湯前祥二, 鈴木輝好 (2000), モンテカルロ法の金融工学への応用, 朝倉書店.

[2] Grant, D., G.Vora and D.Week (1996), "Simulation and the early-exercise option problem", *Journal of Financial Engineering*, 5(3), 211-227.

[3] Lamberton, D. and B.Lapeyre (1996), *Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance*, Chapman and Hall.

[4] Yuri Kifer (2000), "Game Options", *Finance and Stochastics*, 5, 443-463.