2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファジーゲームにおけるコアと安定集合

02005220　東京工業大学　*石原　慎一　ISHIHARA　Shin - ichi
01013770　東京工業大学　武藤　滋夫　MUTO　Shigeo
Tilburg University　Stef Tijs
'Alexandru Ioan Cuza' University　Rodica Branzei

1　はじめに

協力ゲームにおいて、主に分析されているのは特性関数形ゲームである。このゲームでは、提携が協力することによって得られる利益が提携ごとに定められているものである。このゲームにおいて、プレイヤーが提携に参加をするときには、必ず完全に協力をすることが前提とされている。ところが、実際には提携を形成したときに、その提携に完全に協力をするとは限らない。このような状況を表すゲームがファジーゲームである。

2　サーベイ

特性関数形ゲーム(以下クリスプゲーム)において、コアと安定集合の定義を紹介する。コアの定義はコアとD-コアの2種類ある。

定理　クリスプゲームにおいて、コアはD-コアの部分集合である。

定理　クリスプゲームwにおいて、任意の提携Sに対し、$w(N)\geq w(S)+\sum_{i\in N\setminus S}w(\{i\})$を満たすならば、コアとD-コアは等しい。

定理　クリスプゲームにおいて、安定集合が存在するならば、D-コアを含む。

定理　クリスプゲームがコンベックスならば、D-コアが唯一の安定集合になる。

3　ファジーゲーム

プレイヤーの集合をNとし、ファジー提携の集合を$F^N=[0,1]^N$とする。このとき、プレイヤーの集合がNであるファジーゲームの集合をFG^Nとする。ちなみに、特性関数形ゲームにおける提携の集合は$2^N=\{0,1\}^N$であり、ファジーゲームが特性関数形ゲームの拡張になっていることがわかる。

4　コアと安定集合

ファジーゲームにおけるコアと安定集合を定義する。ここでは、Aubin が定義したコアのほかに、プロパーコアとD-コアを定義した。

定義　配分の集合

vの配分の集合を以下のように定義する。

$$I(v)=\{x\in\mathbb{R}^N \mid \sum_{i\in N}x_i=v(e^N),\ x_i\geq v(e^i)\text{ for each } i\in N\}$$

定義　支配関係

$x\in I(v)$が$y\in I(v)$を支配するとは、以下の2つの条件を満たすファジー提携sが存在することである。

(i) 任意の$i\in\{j:s_j>0\}$に対し、$x_i>y_i$

(ii) $\sum_{i\in N}s_ix_i\leq v(s)$

定義　3つのコア

Aubin のコア：

$$C(v)=\{x\in \mathbf{R}^N \mid \sum_{i\in N} x_i = v(e^N),\ \sum_{i\in N} s_i x_i \ge v(s) \text{ for each } s\in F^N\}$$

プロパーコア：

$$C^P(v)=\{x\in \mathbf{R}^N \mid \sum_{i\in N} x_i = v(e^N),\ \sum_{i\in N} s_i x_i \ge v(s) \text{ for each } s\in PF^N\}$$

D-コア：

$$DC(v)=\{x\in I(v) \mid \neg y \ dom\ x \text{ for all } y\in I(v)\}$$

定義　安定集合

K が安定集合であるというのは、以下の2つの条件を満たすときである。

(i) (内部安定性) 任意の $x,y\in K$ に対し、x は y に支配されない。

(ii) (外部安定性) 任意の $z\in I(v)\setminus K$ に対し、z を支配するような $x\in K$ が存在する。

定理　ファジーゲームにおいて、プロパーコアはD-コアの部分集合である。

定理　ファジーゲーム v において、任意の提携 s に対し $v(e^N)\ge v(e^S)+\sum_{i\in N\setminus S} v(e^i)$ を満たすならば、プロパーコアとD-コアは等しい。

定理　ファジーゲームにおいて、安定集合が存在するならば、D-コアを含む。

5　コンベックスファジーゲーム

ファジーゲームの1種であるコンベックスファジーゲームを以下で定義する。

定義　コンベックス

ファジーゲーム v がコンベックスであるとは、以下の2つの条件を満たすときである。このとき、v がコンベックスファジーゲームという。

1．任意の $s,t\in F^N$ に対し、$v(s\vee t)+v(s\wedge t)\ge v(s)+v(t)$ を満たす。ここで、$s\vee t$ と $s\vee t$ は、i 成分がそれぞれ $\max\{s_i,t_i\}$ と $\min\{s_i,t_i\}$ と等しいものである。

2．任意の i と任意の s^{-i} に対し、$g_{s^{-i}}(t)=v(s^{-i}\parallel t)$ が凸関数である。ここで、$(s^{-i}\parallel t)$ とは、i 成分のみが t と等しく、それ以外の成分は s^{-i} と等しいものである。

定理　ファジーゲーム v がコンベックスであるとき、D-コアが唯一の安定集合になる。

6　おわりに

クリスプゲームで満たされるコアと安定集合の関係がファジーゲームにおいても満たされることがわかった。特に、ファジーゲームがコンベックスであるときには、コアと安定集合が一致することがわかった。

7　参考文献

Aubin, J.P., 1974. Coeur et valeur des jeux flous a paiement lateraux, C.R.Acad.Sci. Paris 279 A 891-894.

Gillies, D.B., 1953. Some theorems on n-person games. Ph.D.Thesis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Shapley, L.S., 1971. Cores of convex games, International Journal of Game Theory 1, 11-26.

Shapley, L.S. and M.Shubik, 1969. On market games, Journal of Economic Theory 1, 9-25.