2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

格子型市街地の確率的火災拡大モデル

02502600　慶應義塾大学　*廣井　悠　HIROI U
01107680　慶應義塾大学　栗田　治　KURITA Osamu

1.はじめに

近年，都市火災の拡大現象を解明する手法において計算機の利用によるシミュレーション実験が活発に進められている．これらの研究は，具体的であるがゆえ対象市街地独自の防災計画を策定するという目的においては非常に有用であるといえよう．しかし，火災拡大現象の一般的解明という点においては解析的な手法を用いることで得られる知見もまた重要であるに違いない．[1]は市街地を連続平面として捉えた上で空間ポアソン分布によって延焼面積を類推したものであり，[2]は一次元市街地における確率的火災拡大モデルを提唱した．本研究では[2]を参考にした上で，市街地を正方格子型で近似し火災拡大現象を確率モデルによって定式化する．その上で市街地火災の一般的性質をうかがうことを試みる．

2.前提と定式化

市街地火災拡大の確率論的モデルを構築するため，市街地を正方格子状のゾーンに分割したうえで，その代表点を(i,j)とし，(i,j)における炎上確率や単位時間あたりの消火率を次のように定義する：

$f(i,j,t)$：時刻tで(i,j)が燃えている確率，

$W(i,j,t)$：時刻tで(i,j)が燃えているとき，その代表点の火災が単位時間あたりに鎮火してしまう率．

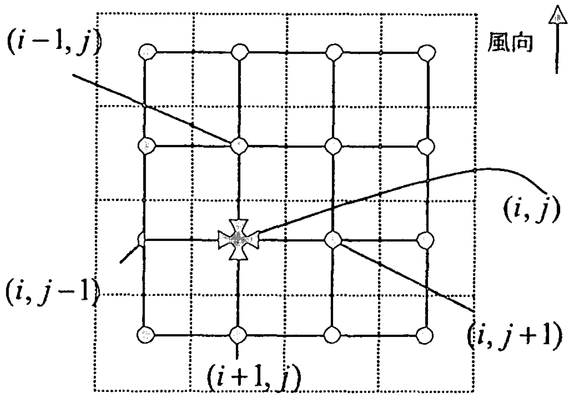

図1　ゾーンとその代表点

また，火災の延焼速度は風向きによって大きく変わることを考慮した上で[3]，(i,j)から各方向への単位時間あたりの延焼率を次のように定義する：

$D(i,j,t)$：時刻tでの風下側の代表点への延焼率，

$U(i,j,t)$：風上側，$S(i,j,t)$：風横側．

すると，図1のように例えば$(i+1,j)$から(i,j)に単位時間当たり$D(i+1,j,t)$の率で炎が燃え移るため，時刻$t+\Delta t$において(i,j)が燃えている確率は飛び火や斜め方向への延焼は考えないとすると，以下のように記述できる（ただし，ここでの$f(i,j,t)$は0から1までの範囲にあるものとする）．

$$
\begin{aligned}
&f(i,j,t+\Delta t)\\
&=f(i,j,t)\cdot\{1-W(i,j,t)\cdot\Delta t\}\\
&+\{1-f(i,j,t)\}\cdot[1-\{1-f(i,j+1,t)\cdot S(i,j+1,t)\Delta t\}\\
&\times\{1-f(i,j-1,t)\cdot S(i,j-1,t)\cdot\Delta t\}\\
&\times\{1-f(i-1,j,t)\cdot U(i-1,j,t)\cdot\Delta t\}\\
&\times\{1-f(i+1,j,t)\cdot D(i+1,j,t)\cdot\Delta t\}]
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

ここで阪神大震災時の市街地の最終的な延焼割合は

$$\frac{延焼した面積}{市街地の全面積}=0.003$$

程度であることがわかっている[1,4]．延焼割合が十分小さいので，時刻tに(i,j)が燃えている確率$f(i,j,t)$の二次の項は無視することができるとして，式(1)を変形し，$\Delta t\to 0$の極限操作を行うことによって(2)式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}f(i,j,t)=-f(i,j,t)\cdot W(i,j,t)+\{f(i,j+1,t)\cdot S(i,j+1,t)\\
&+f(i,j-1,t)\cdot S(i,j-1,t)+f(i+1,j,t)\\
&\cdot D(i+1,j,t)+f(i-1,j,t)\cdot U(i-1,j,t)\}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

ここで，$y_{i,j}(t)=f(i,j,t)$として

$$
Y(t)=\begin{bmatrix}
y_{1,1}(t) & y_{1,2}(t) & \cdots & y_{1,n}(t)\\
y_{2,1}(t) & y_{2,2}(t) & & \\
 & & & \\
y_{n,1}(t) & \cdots & & y_{n,n}(t)
\end{bmatrix}
$$

と定義する．そして，(2)式の右辺部分を$g_{i,j}(Y(t))$とおいて

$$G(Y(t)) = \begin{bmatrix} g_{1,1}(Y(t)) & g_{1,2}(Y(t)) & \cdots & g_{1,n}(Y(t)) \\ g_{2,1}(Y(t)) & & & \\ & & & \\ g_{n,1}(Y(t)) & \cdots & & g_{n,n}(Y(t)) \end{bmatrix}$$

とすると，(2)式は(3)式のように表される．

$$\frac{d}{dt}Y(t) = G(Y(t)) \quad (3)$$

ここで，延焼確率や消火確率は初期状態からの経過時間や市街地の形状に依存しないという仮定をおくと，延焼率 D,U,S や消火率 W を定数とおくことができる． このとき，例えば $g_{i,j}(Y(t))$ は

$$g_{i,j}(y) = -W\cdot y_{i,j}(t) + U\cdot y_{i-1,j}(t) + D\cdot y_{i+1,j}(t) + S\{y_{i,j+1}(t) + y_{i,j-1}(t)\} \quad (4)$$

となる（ただし $i,j \neq 0,n$）．
よって線形微分方程式(3)は(5)式の如く単純に記述することができる．

$$\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t) + Y(t)B \quad (5)$$

ここで，この定数係数の線形微分方程式を解くために行列 $Y(t)$ を n^2 次元のベクトル $\tilde{Y}(t)$ に変換することで，下式が得られる．

$$\frac{d}{dt}\tilde{Y}(t) = C\tilde{Y}(t) \quad (6)$$

また，初期条件として時刻0における各ゾーンの延焼確率が $y_{i,j}(0)$ であるとすると，その解は次式のようになる：

$$\tilde{Y}(t) = \exp(tC)\cdot\tilde{Y}(0) \quad (7)$$

ただし $\exp(tC)$ は行列 C の指数関数（解核行列）を意味する．ここで行列 C の要素として以下を得る．

$c_{i,i} = -W(\mathrm{i}=1,\cdots,n^2)$, $c_{i,i+n} = D(\mathrm{i}=1,\cdots,n^2-n)$,
$c_{i,i-n} = U(\mathrm{i}=1+n,\cdots,n^2)$, $c_{i,i+1} = S(i=1,\cdots,n^2,\mathrm{mod}(i,n)\neq 0)$,
$c_{i+1,i} = S(i=1,\cdots,n^2,\mathrm{mod}(i,n)\neq 0)$, $c_{i,j} = 0$(それ以外).

3.消防施設の配置問題への応用例

今回のモデルは，都市の延焼確率についての知見を与えるのみならず，様々な事象に応用することができる．今回はその中でも特に，消防施設の配置について考える．ここで，延焼率 D,U,S を定数とし，消火率の方は $W_{i,j}$ の如く市街地の形状によって変化するものとしよう．ここで延焼率並びに消火率がある程度小さいものであると仮定して t の一次近似より，

$$e^{Ct} \fallingdotseq I + \frac{C}{1!}t$$

を考えると，市街地全体の延焼確率 $y(t)$ は

$$y(t) = -\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}(W_{i,j}\cdot y_{i,j}(0)\cdot t) + (\text{定数}) \quad (8)$$

となる．
よって市街地全体の延焼確率を最小にしたい時は，

$$\sum_{i,j} W_{i,j}\cdot y_{i,j}(0) \quad (9)$$

が少しでも大きくなる $W_{i,j}$ が最適な消火率となる（ただし次式を満たす $W_{i,j}$ でなくてはならない）：

$$0 \leq g_{i,j}(y) = (1-W_{i,j}t)\cdot y_{i,j}(0) + t[U\cdot y_{i-1,j}(0) + D\cdot y_{i+1,j}(0) + S\{y_{i,j+1}(0) + y_{i,j-1}(0)\}] \leq 1 \quad (10)$$

つまり消防施設の配置問題においては延焼による影響を考える必要はほとんどなく，出火確率の大きいところに消防施設を優先して配置すればよいという当然の帰結となる．これは，市街地火災において初期段階での消火が最も重要であることを示していることに他ならない．現実のデータによる検証等が今後の課題である．

4.参考文献

[1]栗田治(2000)：「空間ポアソン分布を応用した多発火災の延焼面積モデル」,2000 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春期研究発表会アブストラクト集, 2-D-5, pp.206-207
[2]青木義次(1987)：「都市火災拡大の一次元離散型確率モデル」,日本建築学会計画系論文報告集第 381 号 pp.111～121
[3]小出治(1978)：「大震火災時の被害予測手法の研究」,東京大学学位論文
[4]http://www.fdma.go.jp/html/new/syukabousi01.html：「地震時における出火防止対策のあり方に関する調査検討報告書について」