2－C－1

2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

3次元空間の領域内距離分布

01014350　筑波大学　*大津　晶　OHTSU Shou
01102840　筑波大学　腰塚武志　KOSHIZUKA Takeshi

1. はじめに

これまで筆者らは，2次元平面上における閉領域内の距離分布を，平面上に定義した一様な直線を用いる計算によって導く方法を提案してきた（たとえば文献[1]）．本稿ではこの方法を3次元に拡張し，3次元空間の閉領域内部の距離分布導出方法について述べる．なお紙面の都合上，“距離分布がいかなる概念か”，さらに“2次元空間における一様な直線を用いた距離分布の計算方法”については詳述しないので，文献[1]や[2]などを参照していただきたい．

2. 3次元空間における一様な直線

3次元空間における2点 p_1, p_2 が，図1の直交座標系 xyz において (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) で与えられているものとする．この2点を結ぶ直線 g の方向ベクトル h_g を法線ベクトルとする平面を考え，原点を固定したまま x' 軸が h_g に平行になるように（すなわち上記の平面が $y'z'$ 平面に一致するように）座標系を回転させて得られる新しい直交座標系を $x'y'z'$ とする．

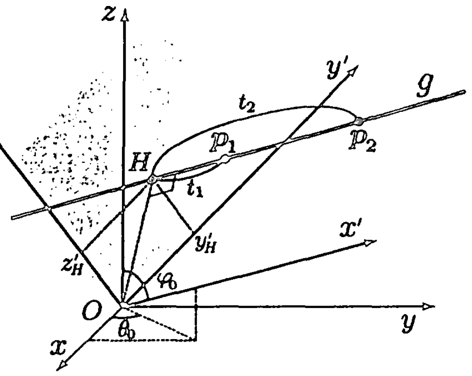

図 1: 一様な直線 g の定め方

このように直線 g を4変数 $(\varphi_0, \theta_0, y'_H, z'_H)$ によって定めたときに，一様に分布する4変数に対応する直線群を3次元空間における一様な直線と定義できる（正確には変数 φ_0 に関しては $\sin\varphi_0$ の重みをつけなければならないが，これについては後述する）．

定義から原理的に導かれる性質は基本的に2次元平面における一様な直線と同じと考えて良い．すなわち，合同変換による直線の測度が不変であり，また大局的な線密度は空間のあらゆる地点で一定である．

3. 空間内の2点と直線上の2点

$x' > 0$ の領域について考えても一般性は保たれるので，直線 g と $y'z'$ 平面の交点を H から2点 p_1, p_2 までの距離をそれぞれ t_1, t_2 とする．前述の座標軸の回転変換はつぎのように表されるので，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_0\cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & -\cos\varphi_0\cos\theta_0 \\ \sin\varphi_0\sin\theta_0 & \cos\theta_0 & -\cos\varphi_0\sin\theta_0 \\ \cos\varphi_0 & 0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$i = 1, 2$ に対して $p_i(x_i, y_i, z_i)$ は以下のように書ける．

$$\begin{cases} x_i = -z'_H\cos\varphi_0\cos\theta_0 - y'_H\sin\theta_0 + t_i\sin\varphi_0\cos\theta_0, \\ y_i = -z'_H\cos\varphi_0\sin\theta_0 + y'_H\cos\theta_0 + t_i\sin\varphi_0\sin\theta_0, \\ z_i = z'_H\sin\varphi_0 + t_i\cos\varphi_0. \end{cases}$$

計算量が多いため途中の式展開は省くが，この関係を用いれば，$\mathrm{d}x_i$ と $\mathrm{d}y_i$，$\mathrm{d}z_i$ の外積 $[\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}z_i]$ を計算することができ，この結果を用いて最終的につぎのような関係を導くことができる．

$$\begin{aligned}&[\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}z_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}y_2, \mathrm{d}z_2] \\ &= (t_2 - t_1)^2 \sin\varphi_0\,[\mathrm{d}\varphi_0, \mathrm{d}\theta_0, \mathrm{d}y'_H, \mathrm{d}z'_H, \mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2] \qquad (1)\end{aligned}$$

一様な直線を定めた変数をまとめて，

$$[\mathrm{d}G] = [\mathrm{d}\varphi_0, \mathrm{d}\theta_0, \mathrm{d}y'_H, \mathrm{d}z'_H]$$

とすれば，式(1)はつぎのように書き換えられる．

$$[\mathrm{d}p_1, \mathrm{d}p_2] = (t_2 - t_1)^2 \sin\varphi_0\,[\mathrm{d}G, \mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2]. \qquad (2)$$

式(2)を用いれば2次元平面の場合と同様に，空間内で固定した直線上の2点の関係（今回は2点間の距離）を調べたのち一様な直線に対応する積分操作を施すことで，3次元空間内のあらゆる2点のペアについてもれなく計算できることになる．

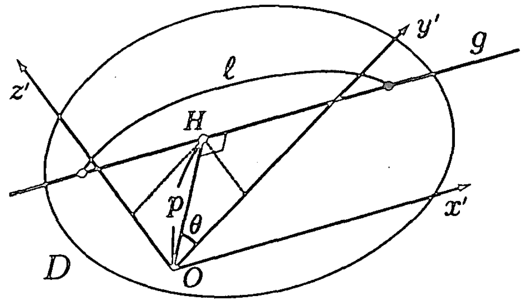

図 2: 領域 D に交わる直線 g

図3に示した直線 g が領域 D の内部に含まれる部分（図中の実線部分）の長さを ℓ とすると，g を使って計算することができる距離分布を $f_g(r)$ はその累積分布を $F_g(r)$ を使って，

$$\begin{aligned} f_g(r) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\iint_{|t_2-t_1|<r} (t_2 - t_1)^2 \sin\varphi_0\ \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \\ &= 2r^2(\ell - r)\cdot\sin\varphi_0 \qquad (3)\end{aligned}$$

となる．したがって領域 D 内部のあらゆる 2 点の直線距離 r の距離分布 $f(r)$ は，

$$f(r) = \int_{G_r} 2r^2(\ell - r)\cdot \sin\varphi_0 \, \mathrm{d}G_r, \quad G_r = \{G | r < \ell\} \tag{4}$$

のように計算することができる．

つまり一様な直線さえ正しく（というよりも最後に辻褄が合うように）定義しさえすれば，その後の距離分布導出手順は 2 次元の場合とまったく同じであることがおわかりいただけるだろう．

4. 球内部の距離分布

前節の式 (2) を使えば，理論上は任意の形状の凸閉領域内部の距離分布を計算できる．しかし一般に g の領域内部の長さ ℓ を簡単な関数で表すことはできないので適当な G を用意して数値計算することになるのだが，本節では理論的に導出可能（且つ他の計算方法で検算可能）な“球”の距離分布を計算してみる．

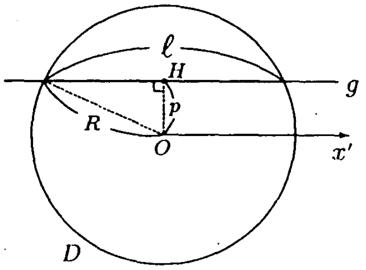

図 3: 球と直線の関係

図 3 は図 2 で示した空間の x' 軸と g を含む断面である．計算の便宜上，原点から H までの距離を p，線分 OH と y' 軸がなす角度を ω とする．このとき，

$$y'_H = p\cos\omega, \ z'_H = p\sin\omega$$

より，後の計算で，以下に注意しておく必要がある．

$$[\mathrm{d}y'_H, \mathrm{d}z'_H] = p\,[\mathrm{d}p, \mathrm{d}\omega]. \tag{5}$$

球の半径を R とすると，$\ell = 2\sqrt{R^2 - p^2}$. したがって式 (4) より $f(r)$ はつぎのように計算できる．

$$\begin{aligned} f(r) &= 4\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\sqrt{R^2-r^2/4}} 2r^2 p\sin\varphi_0\left(2\sqrt{R^2-p^2}-r\right) \mathrm{d}p\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi_0\,\mathrm{d}\theta_0 \\ &= \frac{\pi^2}{3}r^5 - 4\pi^2R^2r^3 + \frac{16\pi^2R^3}{3}r^2. \end{aligned} \tag{6}$$

式 (6) を球内の点のペアの総量で基準化したものを改めて $f_{球}(r)$ としておこう．

$$\begin{aligned} f_{球}(r) &= \left(\frac{\pi^2}{3}r^5 - 4\pi^2R^2r^3 + \frac{16\pi^2R^3}{3}r^2\right) \Big/ \left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^2 \\ &= \frac{3}{16R^6}r^5 - \frac{9}{4R^4}r^3 + \frac{3}{R^3}r^2. \end{aligned} \tag{7}$$

紙幅の都合もあるので詳述しないが，式 (7) は Crofton の微分方程式（文献 [3]）を用いて導くことも可能であるが，(2 次元の場合と同様に) この方法は球（円）の対称性に強く依存する．ここで示した一様な直線を用いた方法は，数値計算アルゴリズムの実装が比較的容易で，実際の空間を対象にした分析へ応用しやすいという点において優れて有利である（もちろん Crofton の微分方程式を用いた方法は，式 (7) の検算として意味はあるし，次元に依存しないスマートな解法にはそれ以上の価値はあるのだが）．

式 (7) から平均 $\mathrm{E}(r)$ 分散 $\mathrm{V}(r)$ を求めると，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(r) &= \int_0^{2R} r\, f_{球}(r)\,\mathrm{d}r &= \frac{36}{35}\alpha, \\ \mathrm{E}(r^2) &= \int_0^{2\alpha} r^2 f(r)\,\mathrm{d}r &= \frac{6}{5}\alpha^2, \\ \mathrm{V}(r) &= \mathrm{E}(r^2) - \{\mathrm{E}(r)\}^2 &= \frac{174}{35^2}\alpha^2. \end{aligned}$$

$f_N(r)$ が正規分布 $N\left(\frac{36}{35}R, \frac{174}{35^2}R^2\right)$ に従うとすると，

$$f_N(r) = \frac{35}{\sqrt{348\pi R}} e^{-\frac{35^2\left(r-\frac{36}{35}R\right)^2}{348R^2}}. \tag{8}$$

さらに 2 次元平面上における円内部の基準化した距離分布を $f_{円}(r)$ とすると，文献 [3] などから，

$$f_{円}(r) = \frac{4r}{\pi R^2}\ \arccos\frac{r}{2R} - \frac{r^2}{\pi R^4}\sqrt{4R^2 - r^2}. \tag{9}$$

$f_{球}, f_N, f_{円}$ を重ねて描くと図 4 のようになる．

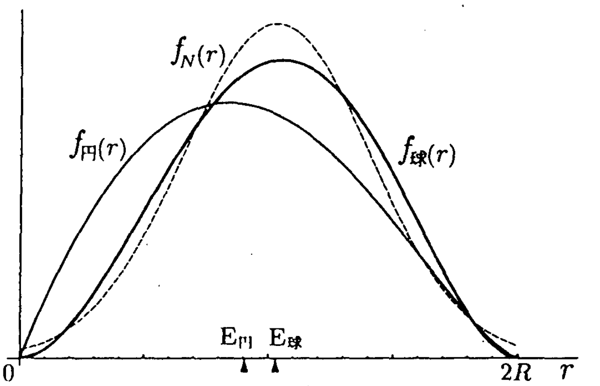

図 4: 距離分布の比較

5. おわりに

本稿では距離分布の導出についてのみ述べたが，一様な直線を用いた方法は通過流動量分布の計算にも有効であることがわかっている．これも含めた計算結果を当日紹介する．

参考文献

[1] 腰塚武志, 大津　晶 (2001)：都市領域における距離分布の導出とその応用．日本都市計画学会学術研究論文集，第 36 号，pp.871–876.

[2] 腰塚武志 (1998)：一様な直線を介して 4 次元を 2 次元から見る．日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集,pp.30–31.

[3] 谷村秀彦, 腰塚武志他 (1986)：都市計画数理, 朝倉書店.