2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Semi-PH過程の構成法(2)

02103790 神奈川大学 *岸 康人 KISHI Yasuhito
01102990 神奈川大学 紀 一誠 KINO Issei

1 はじめに

近年相関をもつトラヒックの研究の重要性が高まってきている．前稿[3]ではLatouche[1]のSemi-Poisson過程を拡張し，任意のPH分布に従い，しかも独立ではなく相関をもつ確率変数列$\{X_n > 0\}_{n=1}^{\infty}$の構成法として，Semi-PH過程を提案した。本稿では，いくつかの計算例を挙げ，その性質を考察する．

2 計算例

例1: 位相数$T(=2)$で，初期状態分布a，推移速度行列Qが以下のように与えられるマルコフ過程の吸収時間Xが従うPH分布A_1 (a,Q)を考える．

$$a=(1,0)\ ,\ Q=\begin{pmatrix} -0.1 & 0.05 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix}$$

周辺分布がこの分布に一致するようなセミマルコフ過程を構成する．$\{1,\dots,N\}(N>T)$の状態空間をもつ既約なマルコフ連鎖を考え，その推移確率行列をPとする．NはPHの位相数より大きい任意の整数である．

A_1の密度関数を図1に示す．PH分布A_1のLaplace-Stieltjes変換(LST)は，以下のように部分分数に展開される．

$$E(e^{-\theta X})=\frac{0.125}{\theta+0.1}+\frac{-0.075}{\theta+0.3}$$

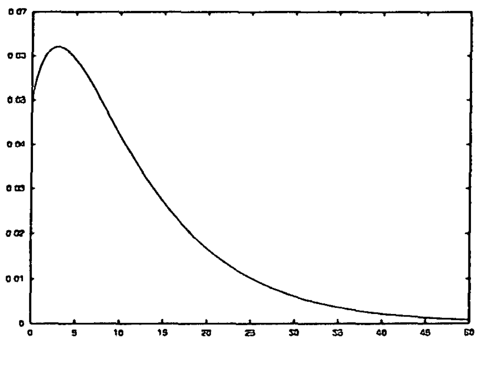

図1: 密度関数

$E(e^{-\theta X})$の部分分数展開に現れるT個の係数及び0から構成されるN次元ベクトル$g=(0.125,-0.075,0)$を定義しておく。

今，$N=3$として，$E(e^{-\theta Z_1})=\frac{0.1}{\theta+0.1}$，$E(e^{-\theta Z_2})=\frac{0.3}{\theta+0.3}$，$E(e^{-\theta Z_3})=\frac{0.7}{\theta+0.7}$を定義し，確率変数$U_\ell$を

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ U_2 &= Z_2 + Z_3 \\ U_3 &= Z_3 \end{aligned}$$

と定める。U_ℓのLSTを部分分数展開した各項の係数を要素とする上三角行列Cを構成する。

$$C=\begin{pmatrix} 0.175 & -0.263 & 0.088 \\ 0 & 0.525 & -0.525 \\ 0 & 0 & 0.700 \end{pmatrix}$$

gとCを用いて，セミマルコフ過程を支配するマルコフ連鎖Pの定常分布を

$$\pi=gC^{-1}=(0.7143,0.2143,0.0714) \qquad (*)$$

と定める。Proposition1,2[3]より，このセミマルコフ過程の周辺分布はPH分布A_1に一致する。また，この共分散関数及び相関係数は，

$$E(X_1X_n)=\nu\mathrm{diag}(\pi)P^{n-1}\nu^t$$

$$\rho_n=\frac{E(X_1X_n)-\{E(X)\}^2}{V(X)}$$

(ただし，$\nu=(\nu_\ell),\nu_\ell=E(U_\ell)$)
となる。

したがって，定常分布πを持つような推移確率行列Pが決まれば相関は決定される。しかし，与えられたπを定常分布にもつPは一意には決定できない。そこで，遺伝的アルゴリズムを使い(*)を定常分布にもつ可能なPを探索させた結果，以下のような2例のPがみつかった。

$$P_a=\begin{pmatrix} 0.8826 & 0.1174 & 0.0000 \\ 0.3867 & 0.3919 & 0.2214 \\ 0.0137 & 0.6494 & 0.3370 \end{pmatrix}$$

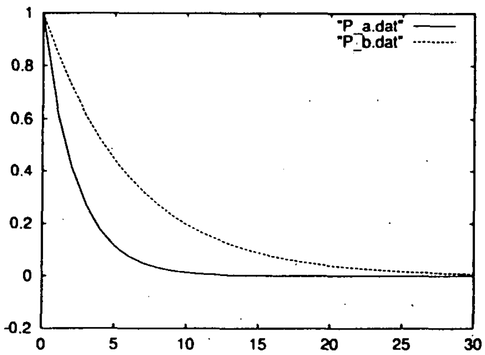

図 2: 相関

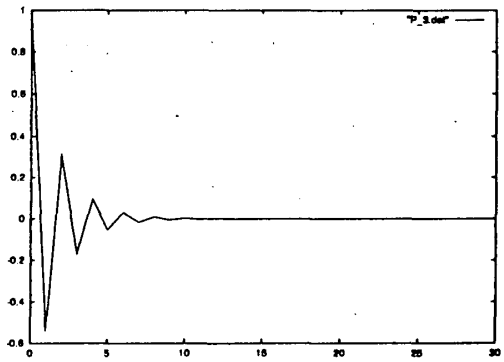

図 3: 相関

$$P_b = \begin{pmatrix} 0.9526 & 0.0474 & 0.0000 \\ 0.1379 & 0.7807 & 0.0815 \\ 0.0601 & 0.1836 & 0.7563 \end{pmatrix}$$

P_a, P_b に対応する相関係数を図 2 に示す.

例 2：以下のような初期状態 $\boldsymbol{a}$ と推移速度行列 Q をもつ Generalized Erlang タイプを考える.

$$\boldsymbol{a} = (1, 0, 0)\ ,\ Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

一般にこの型の分布では $\pi_i = 0 (i \geq N - T + 2)$ となるので，$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_{N-T+1})$ とすればよい.

例 1 の場合と同様にして，セミマルコフ過程を構成する．今，$E(Z_1) = 0.2 (= \lambda_1), E(Z_2) = 0.3 (= \lambda_2), E(Z_3) = 0.4 (= \lambda_3), E(Z_4) = 0.7$ として，LST の部分分数展開から係数を取りだすと，

$$C = \begin{pmatrix} 1.680 & -4.200 & 2.800 & -0.280 \\ 0 & 2.100 & -2.800 & 0.700 \\ 0 & 0 & 0.933 & -0.933 \\ 0 & 0 & 0 & 0.700 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{g} = (1.200, -2.400, 1.200, 0)$ となるので，

$$\boldsymbol{\pi} = (0.7143, 0.2857)$$

とする.

例 3：以下のような PH 分布 $A_3(\boldsymbol{a}, Q)$ を考える.

$$\boldsymbol{a} = (0.3, 0.7)\ ,\ Q = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

前の 2 例と同じように，$N = T + 1$ とし，$E(Z_3) = 0.9$ とすると，$\boldsymbol{\pi} = (0.5081, 0.2141, 0.2778)$ となる．この $\boldsymbol{\pi}$ を定常分布とする推移確率行列 P を探索すると，例えば以下のような P が得られる.

$$P = \begin{pmatrix} 0.2544 & 0.1989 & 0.5468 \\ 0.7110 & 0.2890 & 0.0000 \\ 0.8155 & 0.1845 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

P よる相関を図 3 に示す.

3 今後の課題

本稿では，Semi-PH 過程の特徴を調べ，遺伝的アルゴリズムにより与えられた定常分布に従う推移確率行列を構成し，セミマルコフ過程を実現する数値例を示した．さらに，与えられた定常分布並びに相関係数を同時に満たすような推移確率行列を構成することが今後の課題である.

参考文献

[1] Latouche G., An Exponential Semi-Markov Process, with Applications to Queueing Theory, *Commun.Statist.-Stochastic Models*, **1**, 137-169, 1985.

[2] 牧本直樹,「待ち行列アルゴリズム–行列解析アプローチ–」朝倉書店, 2001.

[3] 紀一誠，岸康人,Semi-PH 過程の構成法 (1),2002 年秋季研究発表会アブストラクト集