2－B－1

2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

セルフテスティングシステムの最適点検方策

02602443　愛知工業大学大学院　*水谷聡志　MIZUTANI Satoshi
01400043　愛知工業大学　中川覃夫　NAKAGAWA Toshio
01012123　三菱重工業株式会社　伊藤弘道　ITO Kodo

1　はじめに

前稿 [1] において，セルフテスティング性をもつシステムの最適定期テスト方策について報告した．セルフテスティングとは，システムに，ある故障集合に属する故障が存在するとき，少なくとも一つの符号入力に対して非符号語を出力する性質をいう [2]．これにより，故障はオンライン状態で検出可能となる．

本研究では，このようなシステムを確率モデル化し，信頼性理論における点検方策を応用し解析する．まず，故障検出までの期待費用を最小にする最適なテスト時刻列 [3] について議論する．とくに，故障分布が指数分布で与えられるとき，最適なテスト時刻の列は，一定間隔になる．また，故障分布が指数分布，自己検出分布が指数混合分布で与えられるとき，故障検出までの期待費用と，単位時間当りの期待費用を最小にする最適な定期テスト時間間隔について議論する．

2　一般点検モデル

システムの故障分布は，有限な平均 $1/\lambda$ をもつ $F(t)$ に従うとする．セルフテスティング性により，故障の発生から発見されるまでの時間は有限な平均 $1/\mu\ (\mu > \lambda)$ をもつ自己検出分布 $G(x)$ に従うとする．外部からのテストを時刻 $0 \equiv T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k < \cdots$ で実行する．

故障は発生した後，次の定期テストにより発見，またはセルフテスティング性により発見されるとする．定期テストを一回実行することに要する費用を c_i とする．システムは故障が発生した後，発見されるまでの時間にかかる損失を単位時間当り c_d とする．故障発見後にかかるシステムの取替費用を c_r とする (図 1)．

故障が発見されるまでを 1 サイクルとする．$\overline{G}(x) \equiv 1 - G(x)$ のとき，1 サイクル当りの期待費用

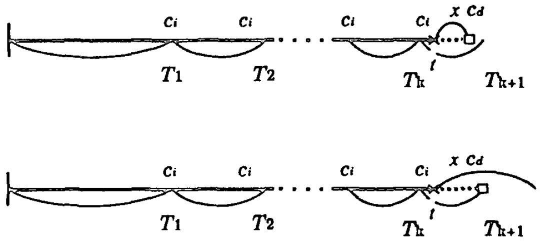

図 1: セルフテスティングシステム

$\mathrm{B}(T_1, T_2, \cdots)$ は

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{T_k}^{T_{k+1}}\left\{\int_0^{T_{k+1}-t}(c_ik+c_dx)\,dG(x)+\left[c_i(k+1)+c_d(T_{k+1}-t)\right]\overline{G}(T_{k+1}-t)\right\}dF(t)$$

$$= c_i\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\overline{F}(T_k)-\int_0^{T_{k+1}-T_k}[\overline{F}(T_k)-\overline{F}(T_{k+1}-x)]\,dG(x)\right\} + c_d\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{T_{k+1}-T_k}[\overline{F}(T_k)-\overline{F}(T_{k+1}-x)]\overline{G}(x)\,dx \qquad (1)$$

となる．$\partial\mathrm{B}/\partial T_k = 0$ とおくと

$$\int_0^{T_{k+1}-T_k}\overline{G}(x)\,dx+\frac{c_i}{c_d}\overline{G}(T_{k+1}-T_k) = \frac{1}{f(T_k)}\left[\int_0^{T_k-T_{k-1}}f(T_k-x)\overline{G}(x)\,dx - \frac{c_i}{c_d}\int_0^{T_k-T_{k-1}}f(T_k-x)\,dG(x)\right] \quad (k=1,2,\cdots) \qquad (2)$$

となる．ここで f は F の密度関数である．$G(x) = 1 - e^{-\mu x}$ とおくと，(2) 式は

$$T_{k+1}-T_k = \frac{1}{\mu}\ln\left(\frac{1}{1-\mu\frac{c_i}{c_d}}-\frac{1}{f(T_k)}\int_0^{T_k-T_{k-1}}f(T_k-x)\mu e^{-\mu x}\,dx\right)^{-1}$$

とくに，$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ とおくと，(2) 式は

$$\int_0^{T_{k+1}-T_k} \overline{G}(x)\,dx + \frac{c_i}{c_d}\overline{G}(T_{k+1} - T_k) = \int_0^{T_k - T_{k-1}} e^{\lambda x}\overline{G}(x)\,dx - \frac{c_i}{c_d}\int_0^{T_k - T_{k-1}} e^{\lambda x}\,dG(x) \quad (3)$$

である．このとき，$T_k \equiv kT_1$ $(k = 1, 2, \cdots)$ であることが証明される．

3 指数混合分布モデル

セルフテスティング性が不完全なとき，短絡故障など同一故障モードの故障であっても，故障箇所によって，発見できる場合とできない場合がある．複雑なシステムでは，すべてを尽くすようなテストパターンを容易に設計することはできないし，実用的な見地からすれば，完全性を犠牲にして，短時間でできるだけ高い検出率を得る方法が要求されるからである [2]．ここでは，故障はセルフテスティングによって確率 p で検出させるとし，$G(x) = p(1 - e^{-\mu x})$ とする．このとき，自己検出率は

$$d(x) = \frac{p\mu e^{-\mu x}}{1 - p + pe^{-\mu x}}$$

であるから，$p\mu$ から 0 の減少関数となり，$G(x)$ はDFR型である．

とくに，$\overline{F}(t) = e^{-\lambda t}$ のとき，最適な定期テスト時間間隔 T^* について議論する．定期テストでは，故障は必ず発見できるとする．このとき，式 (2) は

$$p(c_d - \mu c_i)\left(\frac{1 - e^{-(\mu-\lambda)T}}{\mu - \lambda} - \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu}\right) + (1 - p)\frac{c_d}{\lambda}(e^{\lambda T} - \lambda T - 1) = c_i \quad (4)$$

と書き直される．(4) 式の左辺を $Q(T)$ とすると

$$Q(0) = 0, \qquad Q(\infty) = \infty,$$
$$Q'(T) = (e^{\lambda T} - 1)[(c_d - \mu c_i)e^{-\mu T} + (1 - p)c_d] > 0$$

である．よって，(4) 式を満たす有限で唯一の T^* が存在し，

$$B(T^*) = pc_i e^{-\mu T^*} + c_d\left[(1 - p)T^* + \frac{p}{\mu}(1 - e^{-\mu T^*})\right] \quad (5)$$

である．

つぎに単位時間当りの期待費用 $C(T)$ について最適な T^* を議論する．

$$C(T) = \frac{B(T) + c_r}{1\text{サイクルの期待時間}} = \frac{\begin{bmatrix} c_i\left[1 - \mu p\left(\frac{1-e^{-\mu T}}{\mu} - \frac{e^{-\lambda T} - e^{-(\mu-\lambda)T}}{\mu-\lambda}\right)\right] \\ -\left(c_d/\lambda - c_r\right)(1 - e^{-\lambda T}) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} p\left(\frac{1-e^{-\mu T}}{\mu} + \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \right. \\ \left. - \frac{e^{-\lambda T} - e^{-(\mu-\lambda)T}}{\mu-\lambda}\right) + qT \end{bmatrix}} + c_d \quad (6)$$

である．ここで，c_r は取替費用である．$C(T)$ を微分して 0 とおくと

$$p\left[(c_d - \lambda c_r - \mu c_i)\left(\frac{1 - e^{-(\mu-\lambda)T}}{\mu - \lambda} - \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu}\right) - \frac{c_i\lambda}{\mu - \lambda}(1 - e^{-(\mu-\lambda)T})\right]$$
$$+ q\left[\frac{c_d - \lambda c_r}{\lambda}(e^{\lambda T} - \lambda T - 1) - c_i(e^{\lambda T} - 1)\right]$$
$$- pqc_i\left[\frac{\lambda\mu T}{\mu - \lambda}(1 - e^{-(\mu-\lambda)T}) - (e^{\lambda T} - 1)(1 - e^{-\mu T})\right] = c_i \quad (7)$$

である．これにより，$c_d - \lambda(c_r + qc_i) > 0$ のとき，$Q_5(\infty) = \infty$ となり，最適な T^* $(0 < T^* < \infty)$ が必ず存在する．明らかに，$\lambda(c_d - \lambda c_r - \mu c_i)/\mu^2 > c_i$ ならば，$c_d - \lambda(c_r + qc_i) > 0$ であることにも注意する．

4 まとめ

故障発生から検出までの時間は，ある確率分布に従って発見できるとき，より高い信頼性のため，適当な時刻に外部テストを実行するモデルについて種々議論した．

参考文献

[1] 水谷聡志，中川覃夫，伊藤弘道：セルフテスティング性をもつシステムの最適定期テスト方策，2002年度日本オペレーションズリサーチ秋期研究発表会アブストラクト集，pp.64-65，2002.

[2] 電子情報通信学会編：フォールトトレラントシステム論，電子情報通信学会，1990.

[3] 三根久，河合一：信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982.