2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

2段階捜索の精査の過誤を考慮した最適精査資源配分

01110110　防衛大学校　*小宮　享　KOMIYA Toru
01000890　防衛大学校　飯田耕司　IIDA Koji
01504810　防衛大学校　宝崎隆祐　HOHZAKI Ryusuke

1. 2段階捜索での最適精査資源配分と本研究の目的

捜索センサの有効レンジに比べて非常に大きな目標空間で捜索を実施する際は，安価な捜索手段で目標空間を高速に捜索し，目標の兆候(コンタクトと呼ぶ)を得たあと，コンタクトを精密に調べ目標の発見に至る2段階捜索がしばしば用いられる。この捜索において前者を広域捜索，後者を精査と呼ぶ。広域捜索では高速に捜索するために真目標の見逃し及び偽目標やシステムノイズ等による虚探知が避けられない。真目標や偽目標のコンタクトは，ある精査時間の後に実体が判明するのが普通である。システムノイズによるコンタクトは，信号の再現性がないため精査により何の情報も得られない。従って，ノイズコンタクトが混在する環境では適当な時間で精査を打ち切って再び広域捜索に復帰する必要がある。本研究は連続捜索資源 T を与えられた捜索者が2段階捜索で目標発見確率を最大化するように捜索する場合の精査への資源投入計画を求めた。

モデル化に際しては，広域捜索において真・偽目標のコンタクト及びノイズコンタクトが混在する状況を想定し，また精査判定時には2種類の過誤（第1種：真目標を偽目標と誤識別，第2種：偽目標を真目標と誤認）を犯す可能性も併せて考慮した。第2種の過誤を犯すと，資源量に換算されるペナルティが課された後に広域捜索に復帰する。

従来の研究[1]では，この問題を潜水艦捜索の場合に特化し捜索資源を時間にとって検討し，ペナルティを一定時間として扱ったが，本研究では確率分布に従うペナルティが課せられる最適資源配分問題として検討を行った。

2. 最適精査資源配分計画問題のモデル化

モデルの前提及び変数は以下のとおりである。

1. 目標空間に存在する1つの目標に対し，捜索者は総捜索資源制約 T の捜索を実施する。T は任意に分割可能とする。残り捜索資源が t のときを，状態 t と呼ぶ。
2. 広域捜索における単位捜索資源あたりのコンタクト生起率を λ とする。
3. コンタクトは探知信号の特徴により m 個のクラスに区分される。得られたコンタクトがクラス i である確率は p_{Ci}，$\sum_{i=1}^{m} p_{Ci}=1$ で与えられ，捜索者に既知とする。
4. クラス i のコンタクトが真目標，偽目標又はノイズである確率はそれぞれ p_{Ti}，p_{Fi}，p_{Ni}，で与えられ，捜索者に既知とする。 $(p_{Ti}+p_{Fi}+p_{Ni}=1)$
5. 広域捜索においてコンタクトを得れば，捜索者は直ちにその精査を行う。状態 t で生じたクラス i のコンタクトに対する精査資源の上限値 $\tau_i(t)$ を予め設定し精査を始める。精査終了までの所要資源量は確率変数であるため $\tau_i(t)$ 内で終了することもあるが，$\tau_i(t)$ でも虚実が判定できない場合は精査を停止し，元の広域捜索に復帰する。なお精査中は新たなコンタクトは生起しないものとする。
6. 精査終了までの所要資源の密度関数を真目標では $h_{Ti}(\tau)$，偽目標では $h_{Fi}(\tau)$ とし，分布関数を $H_{Ti}(\tau), H_{Fi}(\tau)$ とする。またノイズのコンタクトは，精査によって目標判別の情報は得られず，精査は $\tau_i(t)$ まで継続される。
7. 状態 t で得たクラス i のコンタクトに対し $\tau_i(t)$ の精査を実施し，以後最適に行動する時の条件付目標探知確率を $G_i(t,\tau_i(t))$，状態 t で未コンタクトで以後最適に行動する時の目標探知確率を $P(t)$ とする。
8. 捜索者が精査終了時に第1種の過誤を犯す確率を a_T，第2種の過誤を犯す確率を a_F とする。第2種の過誤を犯すと，密度関数 $g(x)$ に従うペナルティー資源量 x が捜索者に課せられその後広域捜索に復帰する。a_T, a_F は状態によらず一定であると仮定する。
9. 全捜索資源量 T に対し目標探知確率 $P(T)$ を最大にする各状態 t での最適精査資源配分計画 $\{\tau_i^*(t), i{=}1,\cdots,m, 0\le t\le T\}$ を決定する。

3. 定式化及び解法

微小な状態変化 $[t+\Delta t, t]$ の間での生起事象を考えれば次式が成り立つ。

$$P(t+\Delta t)=\{1-\lambda\Delta t\}\,P(t)+\lambda\Delta t\sum_{i=1}^{m}p_{Ci}G_i(t,\tau_i^*(t)). \tag{1}$$

上式より次の $P(t)$ に関する微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{dP(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}\\ &= \lambda\{\textstyle\sum_{i=1}^{m}p_{Ci}G_i(t,\tau_i^*(t))-P(t)\}. \end{aligned}\tag{2}$$

初期条件 : $P(0)=G_i(0,0)=0 \quad (i=1,\cdots,m)$.

なお $G_i(t,\tau_i(t))$ の最適値 $G_i(t,\tau_i^*(t))$ は以下の式で表される。次式では $\tau_i(t)$ を τ_i と略記する。

$$\begin{aligned}G_i(t,\tau_i^*) &= \max_{0\le\tau_i\le t} G_i(t,\tau_i)\\ &= \max_{0\le\tau_i\le t} p_{Ti}\Big[\int_0^{\tau_i}h_{Ti}(u)\big\{(1-a_T)+a_TP(t-u)\big\}du\\ &\qquad +\big\{1-H_{Ti}(\tau_i)\big\}P(t-\tau_i)\Big] \qquad (3)\\ &+\ p_{Fi}\Big[\int_0^{\tau_i}h_{Fi}(u)\big\{(1-a_F)P(t-u)\\ &\qquad +a_F\int_0^{t-u}g(x)P(t-u-x)\,dx\big\}\,du\\ &\qquad +\big\{1-H_{Fi}(\tau_i)\big\}P(t-\tau_i)\Big]\\ &+\ p_{Ni}P(t-\tau_i).\end{aligned}$$

各 t, i に対し式 (3) を極大化する τ_i^* を求め，式 (2) の初期条件のもと微分方程式を解けば最終的な $P(T)$ 及び最適精査資源配分計画 $\{\tau_i^*(t)\}$ が求まるが，$G_i(t, \tau_i(t))$ が複雑であるために解析解を得ることは困難であり，資源を離散化した次のアルゴリズムに従い数値解を求める。以下，離散化した状態での関数を $P_t = P(t)$, $G_{i,t}(\tau_{i,t}) = G_i(t, \tau_i(t))$, $G_{i,t}^* = \max_{0 \le \tau_i \le t} G_i(t, \tau_i(t))$ と表記する。

[離散資源アルゴリズム]

<u>1</u> 離散資源指標 $t = 0$ とおく。
$P_{t=0} = 0$, $G_{i,t=0}^* = 0$, $(i = 1, ..., m)$ とおく。
<u>2</u> クラス $i = 1$ とする。
<u>3</u> $\tau_{i,t} = 0, \tau_{i,t}^* = 0, G_{i,t}^* = G_{i,t}(\tau_{i,t} = 0) = P_t$ とおく。
<u>4</u> $G_{i,t}(\tau_{i,t})$ を計算し，$G_{i,t}(\tau_{i,t}) > G_{i,t}^*$ ならば
$\tau_{i,t}^* = \tau_{i,t}$, $G_{i,t}^* = G_{i,t}(\tau_{i,t})$ とする。
<u>5</u> $\tau_{i,t} < t$ ならば $\tau_{i,t} = \tau_{i,t} + 1$ として <u>4</u> に戻る。
<u>6</u> $i < m$ ならば $i = i + 1$ として <u>3</u> に戻る。
$i \ge m$ ならば $G_{i,t}^*, P_t$ より P_{t+1} を求める。
<u>7</u> $t < T$ ならば $t = t + 1$, $i = 1$ として <u>3</u> に戻る。
$t \ge T$ ならば 計算終了。

4. 精査に費やす資源の最適条件

$G_i(t, \tau_i(t))$ の $\tau_i(t)$ に関する極大値を得るため式 (3) を $\tau_i(t)$ で偏微分し整理すると次の最適条件式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{p_{T_i} h_{T_i}(\tau_i(t))(1 - a_T)}{1 - p_{T_i} H_{T_i}(\tau_i(t)) - p_{F_i} H_{F_i}(\tau_i(t))} \\ &\quad = \frac{P'(t - \tau_i(t))}{1 - P(t - \tau_i(t))} \\ &\quad + \frac{p_{F_i} h_{F_i}(\tau_i(t)) a_F}{1 - p_{T_i} H_{T_i}(\tau_i(t)) - p_{F_i} H_{F_i}(\tau_i(t))} \\ &\quad \times \frac{P(t - \tau_i(t)) - \int_0^{t - \tau_i(t)} g(x) P(t - \tau_i(t) - x) dx}{1 - P(t - \tau_i(t))}. \end{aligned} \tag{4}$$

式 (4) を満たす τ を $\tau_i^0(t)$ とする。式 (4) の左辺は，$\tau_i^0(t)$ までの精査資源投入で精査が終了しない条件下の限界真目標精査率を表わすが，分子の $(1 - a_T)$ は第 1 種の過誤確率分が割引かれて限界真目標精査率が低下することを示している。一方，右辺第 1 項は，状態 $t - \tau_i^0(t)$ まで捜索が成功していない条件の下で，$\tau_i^0(t)$ で精査を打ち切った場合の探知確率 $P(t - \tau_i^0(t))$ の増加率を表わす。第 2 項は偽目標の精査で真目標と誤認し，ペナルティーが課せられたときの割引かれた目標探知確率を表現する項である。捜索者には誤認により積分項で示される期待ペナルティが課せられ，その分失われる目標探知確率が控除される。

$\tau_i^0(t)$ は $G_i(t, \tau_i(t))$ を極大にする点 $\tau_i^*(t)$ の候補であるが，式 (3) を $\tau_i(t)$ で偏微分した値が $t = 0$ で負の値を持つときは $\tau_i(t) = 0$ も極大点の候補となる。また，$\partial G_i(t, \tau_i(t)) / \partial \tau_i(t)_{\tau_i(t) = t}$ は常に正となることから，端点 $\tau_i(t) = t$ でも極大値を取る可能性がある。これらから，極大値に関する以下の定理が導かれる。

[定理]　最適精査投入資源 $\tau_i^*(t)$ は次式の解である。

$$G_i(t, \tau_i^*(t)) = \max\{G_i(t, \tau_i^0(t)), P(t), G_i(t, t)\}$$

すなわち，$\tau_i^*(t) = \{\tau_i^0(t), 0, t\}$ である。

5. 数値例

捜索資源を時間にとり，以下のパラメータ値で数値実験を行った。

$T = 160, \lambda = 0.05$[回/単位時間]$, a_T = a_F = 0.4$

偽目標を真目標と誤認した際のペナルティ時間：

指数分布の場合：$g(x) = \frac{1}{60} e^{-x/60}$

一定時間の場合：$g(x) = \delta(x - 60)$ (60 単位時間)

コンタクトクラス数を $m = 4$ とし各クラスのパラメータ値をそれぞれ以下の表の値に設定する。精査での所要時間の密度関数は各クラスとも指数分布を仮定し，

$h_{T_i}(\tau) = \alpha_{T_i} e^{-\alpha_{T_i} \tau}, h_{F_i}(\tau) = \alpha_{F_i} e^{-\alpha_{F_i} \tau}$ とする。

表 1: パラメータ値

クラス	(p_{Ti}, p_{Fi}, p_{Ni})	$(\alpha_{Ti}, \alpha_{Fi})$	pc_i
1	(0.3, 0.5, 0.2)	(0.1, 0.05)	1/4
2	(0.3, 0.2, 0.5)	(0.1, 0.05)	
3	(0.3, 0.5, 0.2)	(0.05, 0.1)	
4	(0.3, 0.2, 0.5)	(0.05, 0.1)	

$t = 20 \sim 160$ のときのクラス 1 の $G_1(t, \tau_1(t))$ を図 1 に示す。$\tau = 0$ における G の傾きは正であることから，各 t に関し精査が実施される。$t = 20$ では端点で，それ以外は内点で極大となっている。図 2 は各クラスのコンタクトに対する最適精査計画であり，α_{T_3} が小さく真・偽コンタクトの比率の大きなクラス 3 ほど得られた精査に対し時間を費やすべきであることがわかる。

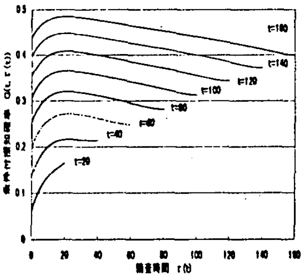

図 1：条件付探知確率

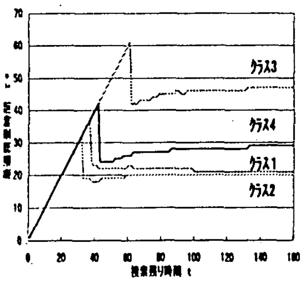

図 2：最適精査時間

なお一定拘束時間の場合の数値実験の結果との比較は発表の当日に報告する。

6. まとめ

本報告では精査で第 2 種の過誤を犯したときに課されるペナルティを一般化したモデルを定式化しペナルティの分布が最適精査計画及び目標探知確率に与える影響を調べた。今後の研究課題としては，ペナルティの積分項の計算の簡素化や特性の異なる複数の領域での最適精査計画問題等が残されている。

参考文献

[1] 松崎, 飯田, 宝崎：日本 OR 学会 2001 年度春季研究発表会アブストラクト集,pp.28-29,2001.5