ウェーブレットによるジャンプ拡散過程をモデルとする シミュレーションデータの解析

02005490　中央大学大学院　＊上野雅之　UENO Masayuki
02302930　中央大学大学院　出町和也　DEMACHI Kazuya
01003883　中央大学大学院　遠藤靖　ENDOW Yasushi

1. はじめに

株価、為替レート、債券価格といった資産価格の時系列が定常な変動であるのか、それとも非定常なものであるのかを知ることは極めて重要である。とくに近年、これら資産価格の時系列分析においてボラティリティの変動に注目が集まっている。以下ではウェーブレット解析を用いて価格時系列の構造変化点の解析を行う。

2. 研究目的

ウェーブレット解析の手法を確率微分方程式で表されたジャンプ拡散過程から算出したシミュレーションデータに適用することによって、ボラティリティや平均収益率の変化点、ジャンプ点の検出力について検討する。

3. 解析

あらかじめ変化点をもつボラティリティや平均収益率、ジャンプ点を構造要素とするシミュレーションデータを生成し、ウェーブレット解析でその変化点を検出する。

3.1 シミュレーションデータ

シミュレーションデータを生成するモデルとして、確率微分方程式

$$dX_t = (c(t) - \lambda k)X_t dt + \sigma(t) X_t dB_t + (J-1)X_t dN_t \tag{3.1}$$

X_t：価格　　$c(t)$：平均収益率

$\sigma(t)$：ボラティリティ　B_t：ブラウン運動

J：ジャンプ幅率　k：ジャンプ幅率の期待値

N_t：ポアソン過程　λ：ポアソン過程の強度

を取り上げる。その理由として、株価等の変動に大きな影響を与えていると考えられる平均収益率やボラティリティ、ジャンプをパラメータにもつことが挙げられる。

本研究では以下の3つのケースに別けて考える。各ケースと各パラメータの関係は表1に示す。

【case 1】式(3.1)の $c(t)$ を0と固定させ、ジャンプは無しとし、$\sigma(t)$ を変化させてシミュレーションデータを生成する。

【case 2】$\sigma(t)$ を定数と固定させ、ジャンプは無しとし、$c(t)$ を変化させて生成する。

【case 3】$c(t)$ と $\sigma(t)$ を定数と固定させ、ジャンプ幅率を変化させて生成する。

表1　相関表

	$c(t)$	$\sigma(t)$	ジャンプ
case1	固定	変化	無
case2	変化	固定	無
case3	固定	固定	有

3.2 ウェーブレット解析

マザーウェーブレットとしてhaar関数を用い、5段階のウェーブレット分解を行う。シミュレーションデータ(s)とレベル5のApproximation(a5)、レベル1～5のDetail(d1～d5)の出力結果例を図1に示す。

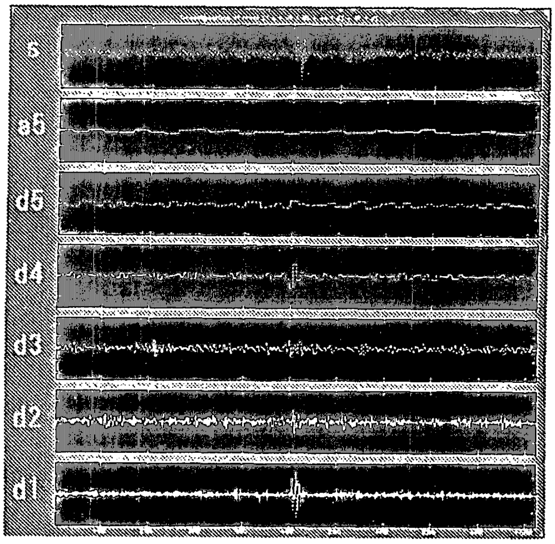

図1　ウェーブレット分解の出力結果例

【case 1】

σ関数としては実際の価格時系列におけるボ

ラティリティ変化の特徴を加味してスパイク状の関数とし、スパイクの高さの違い(コンスタントな部分から 10、5、2 倍)により f1、f2、f3 を用いた。これら 3 種類の σ 関数に対して 100 シリーズのシミュレーションデータを生成し、そのデータをウェーブレット分解して、再構成された Detail から変化点を検出する。

【case1-1】変化点の有無の検出法

変化点の有無は閾値によって検出する。このとき閾値としては各テストデータの標準偏差の整数倍を用いる。例として最もスパイクの高さの高い σ 関数 f1 の結果を図 2 に示す。

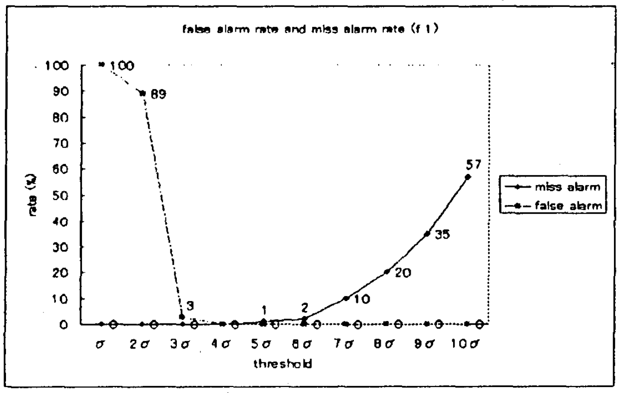

図 2　シミュレーション結果例

また、シミュレーション結果より 3 種類の σ 関数に対する miss alarm(無報)と false alarm(誤報)の割合が他の閾値に比べて小さかった閾値 4σ について表 2 に示す。

表 2　閾値 4σ における各 σ 関数の誤検出率

	f1	f2	f3
miss alarm	0%	8%	82%
false alarm	0%	0%	1%

表 2 より f2 では miss alarm が 8%であったがこれは全体の 10%以下であるのでエラーとみなすことができる。しかし f3 では miss alarm が 82%であり、これはエラーとはみなすことができないほど大きな割合である。ここでは f1、f2 の変化点の検出が可能であった。すなわち、スパイクの高さが 5 倍程度の σ 関数の検出を確認できたと言える。

【case1-2】変化点のタイムラグ

シミュレーションデータ生成の際に σ 関数のスパイクの頂点を時系列の中央に設定しているが、ウェーブレット解析の結果であるレベル 1 の Detail(d1)から読み取れる変化点(d1 の最大値)の発生時刻にタイムラグが生じているか確認する。例として σ 関数 f1 の結果をヒストグラムにして図 3 に示す。

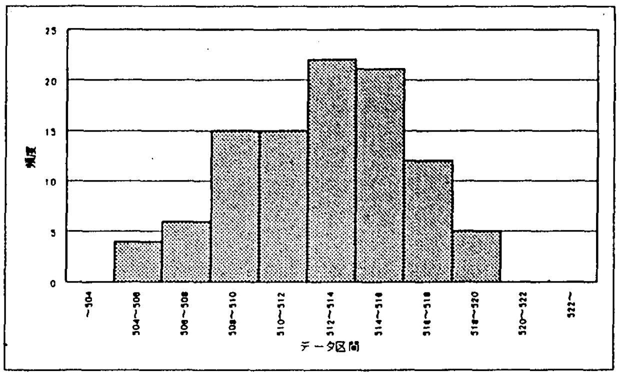

図 3　変化点の発生時刻のヒストグラム例

図 3 より変化点の時系列中央からのずれは絶対的には 8、相対的には10^{-7}であるので、変化点の発生時刻に大きなタイムラグが生じていないことが確認できた。

【case 2】

c 関数としては山型(g1)、谷型(g2)の関数を用いた。これら 2 種類の c 関数に対して 100 シリーズのシミュレーションデータを生成する。そのデータをウェーブレット分解し、再構成された Approximation から変化点を検出する。

解析結果よりここでは g1、g2 の明確な変化点を検出することは困難であった。

【case 3】

数種類の一定なジャンプ幅率をもつ 100 シリーズのシミュレーションデータを生成する。そのデータをウェーブレット分解し、再構成された Detail からジャンプ点を検出する。

4. 今後の課題

実際の価格時系列(株価等)を解析して、その実用性を検討する。

5. 参考文献

[1] Ramazan Gençay, Faruk Selçuk, Brandon Whitcher "An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics" ACADEMIC PRESS　2001

[2] 久田祥史『ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデルについて』日本銀行金融研究所　2002