2003年日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

モンテカルロ法によるネットワーク構造システムの連結安定性の定量的評価

01604870　政策研究大学院大学　諸星　穂積　MOROHOSI Hozumi
01002750　政策研究大学院大学　大山　達雄　OYAMA Tatsuo

1　はじめに

われわれの周囲には, ネットワーク構造を有するシステムを数多く見出すことができる. 交通道路網を構成する道路ネットワークや, 送配電網からなる電力ネットワーク, 都市ガス供給網を構成する都市ガスネットワーク, 等々, 日常生活を営む上で重要かつ不可欠なネットワークシステムは数多く挙げることができる. 本稿では, このようなネットワークシステムの連結安定性について, モンテカルロ法に基づく計算法を導入して [2] で提案した定量的評価法を現実の道路システムに適用した数値結果を報告する. 分析対象は, 我が国の各都道府県の主要道路網である. 本研究で採用したのは単純なモンテカルロ法であるが, 現実問題に対して実用的な計算時間の範囲で, 定量的な高精度評価を行うことが可能であることが判明した.

2　ネットワーク連結安定性

ネットワークを無向グラフ $G=(V,E)$ で表す. V は頂点集合, E は枝集合で, $|V|=n$, $|E|=m$ とする. $\mathcal{G}_k$ を, G から k 本の枝を除去することで得られる部分グラフの全体からなる集合とする. $|\mathcal{G}_k|=\binom{m}{k}$ である. $G_k\in\mathcal{G}_k$ に対して, 連結安定関数 [2] を以下のように定義する.

$$S(G_k)=(G_k\text{中で連結な頂点組の個数})/\binom{n}{2} \tag{1}$$

連結安定関数 S の値は $[0,1]$ に分布するが, その累積分布を $F_k(x)$ で表す.

$$F_k(x)=\#\{G_k:\ S(G_k)\le x\}/|\mathcal{G}_k| \tag{2}$$

ここで # は集合の要素の個数を表す. 期待連結安定関数 $s(k)$ は $S(G_k)$ の $\mathcal{G}_k$ の中での算術平均値とする.

$$s(k)=\frac{1}{|\mathcal{G}_k|}\sum_{G_k\in\mathcal{G}_k}S(G_k) \tag{3}$$

3　モンテカルロ法

他の様々なネットワーク信頼度の計算と同様に, 連結安定関数の計算を $\mathcal{G}_k$ の要素を数え上げることによってしようとすると, グラフ G のサイズが大きくなるにつれ, 膨大な計算が必要になり, 実際的な問題への適用は不可能になる. ここでは, 以下のような単純なモンテカルロ法を, 期待連結安定関数 $s(k)$ の推定値を計算するために利用する.

Crude Monte Carlo Method

Input: グラフ $G=(V,E)$, 除去する枝の数 k, 繰返し回数 N.
Output: 期待連結安定関数の推定値 $\bar{s}(k,N)$.
Method:
　$j:=1,\ S:=0.$
　While $j\le N$:
　　部分グラフ G_k を G から k 本の枝をランダムに除去して作成する.
　　$S:=S+(G_k\text{中の連結な頂点組の数})/\binom{n}{2}$.

$j := j + 1.$
$\bar{s}(k, N) = S/N$

また, 連結安定関数の分布関数 $F_k(x)$ の推定も, 上記のモンテカルロ法中で毎回の繰返しで計算する S を保存しておき ($S_1, \ldots, S_N$ としよう), それらの経験分布

$$F_k^N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I\{S_i \le x\} \quad (4)$$

によって行うことができる. ただし, 指示関数 $I(A)$ は A が真ならば1, 偽ならば0をとる.

分布関数 $F_k(x)$ と経験分布 $F_k^N(x)$ の差異 $\sup_x |F_k(x) - F_k^N(x)|$ については, Kolmogorov-Smirnov 以来の研究があるが, ここでは比較的新しい [1] の結果

$$\Pr\{\sup_x |F_k(x) - F_k^N(x)| > t\} \le 2\exp(-2Nt^2) \quad (5)$$

を紹介する. この結果より, 上記モンテカルロ法により得られた推定値 $\bar{s}(k, N)$ についての

$$\Pr\{|\bar{s}(k, N) - s(k)| > t\} < 2\exp(-2Nt^2) \quad (6)$$

という誤差評価が得られる. また式 (5) により, $F_k(x)$ のパーセント点の点推定, 区間推定を, 経験分布 $F_k^N(x)$ を用いて容易に行うことができる.

4 道路網への適用

上記のモンテカルロ法を, 各都道府県の主要道路網のデータから作成したグラフに適用して, 期待連結関数を計算した. ここで使用した各都道府県のグラフの構造の概要を, 頂点数を横軸, 枝数を縦軸にとったグラフとして図1に示す. 計算結果の詳細については当日述べる.

5 まとめ

ネットワークの安定性を評価するための手法として, 連結安定関数を利用することを提案し, その計算方法として, モンテカルロ法の算法を

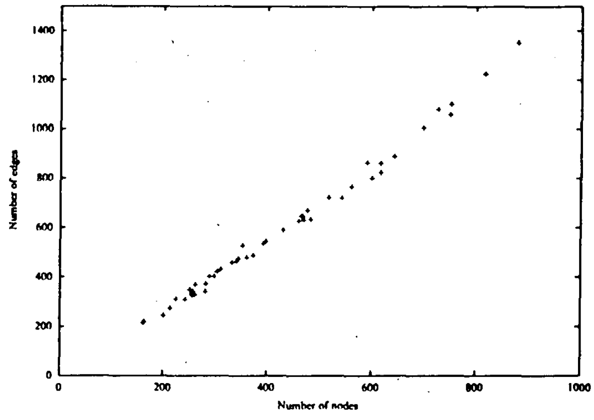

図 1: 都道府県道路ネットワークの頂点数-枝数

提案した. 都道府県毎の道路網を利用して, この方法の有効性の実証分析を行った. 道路網のようなかなり大規模なネットワーク (最大で枝数が約1400, 頂点数が約900) においても, 実用的な時間の範囲で様々な k の値に対する $\bar{s}(k)$ が十分な精度で計算可能であることが判明した.

参考文献

[1] Massart, P.: The tight constant in Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz inequality, *Ann. Prob.*, Vol. 18(1990), pp. 1269–1283.

[2] 大山達雄: ネットワーク構造システムの連結安定性の定量的評価法, 日本OR学会春季研究発表会, pp. 160–161, 2000.

[3] T. Oyama and H. Morohosi: A quantitative method for evaluating stable connectedness of the network-structured system, *Operations Research and Its Applications*, X-S. Zhang and D. Liu(eds.), World Publishing, pp. 54–66, 2002.